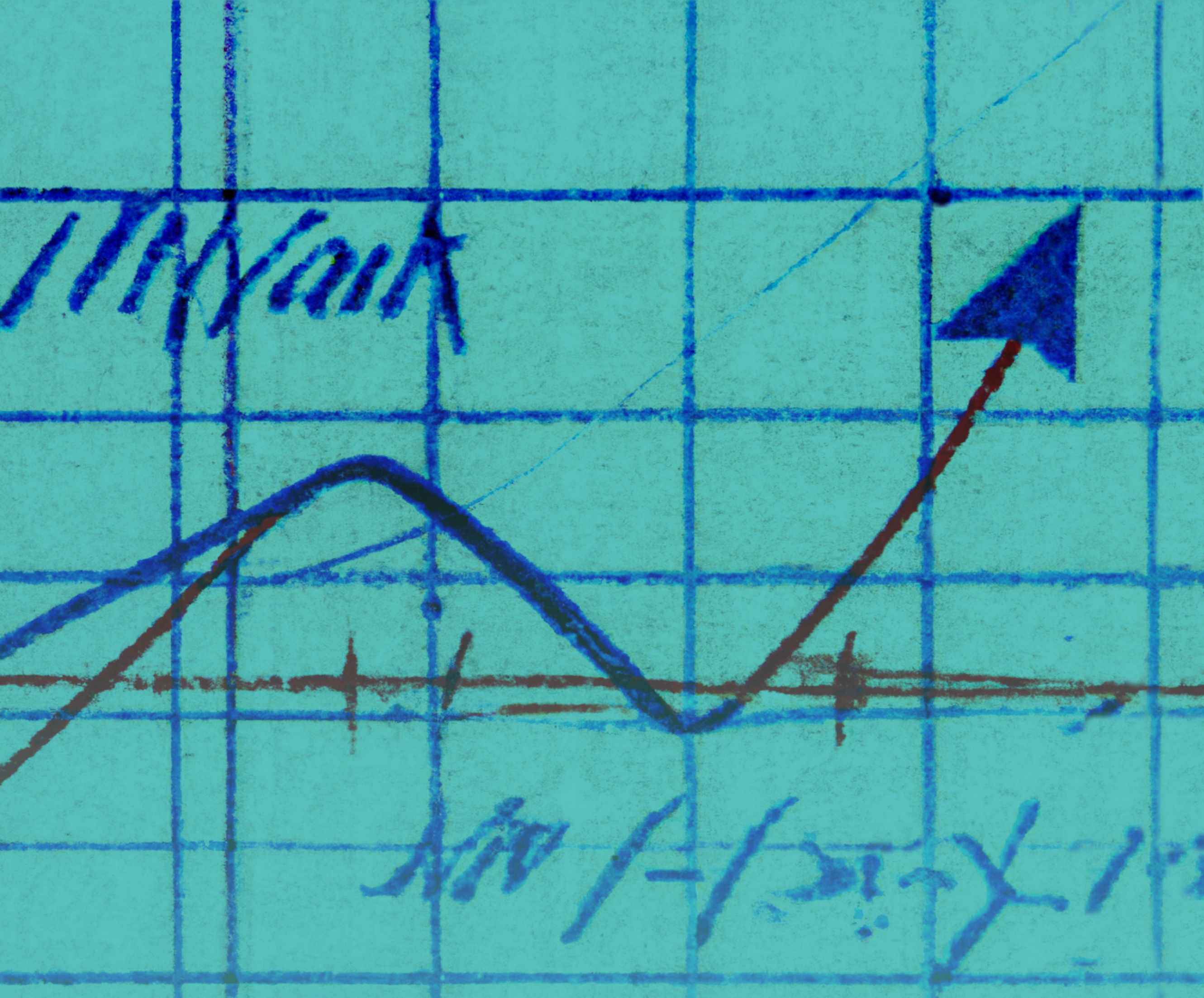


KAPITOLY Z MATEMATICKÉ EKONOMIE

Jan Stoklasa

Vydavatelství Univerzity Palackého

Univerzita Palackého v Olomouci

KAPITOLY Z MATEMATICKÉ EKONOMIE

Jan Stoklasa

Olomouc 2023

Odborní recenzenti: Jana Siebert, Ph.D.
Mgr. Ondřej Kročil, Ph.D.

1. vydání

DOI: 10.5507/ff.23.24463643

ISBN 978-80-244-6364-3 (online: iPDF)

Studentům, kteří mají rádi matematiku,
studentům, kteří matematiku tolerují,
studentům, kteří matematiku rádi nemají,
studentům, kteří matematiku nenávidí…
…pro vás všechny má tento text následující zprávu:

Bez matematiky to prostě nepůjde.

Tak co si to s ní alespoň užít?

…a také mé úžasné ženě Janě, která si toho
s matematikou užívá víc, než kdy myslela.

…a nakonec i naší dceři Karolínce – ať nemá
doma jenom pohádkové knížky.

Předmluva

Ekonomie je společenská věda. Jako taková bere v potaz jedince i jeho specifika a také interakce mezi jedinci navzájem. Na druhou stranu je ekonomie naukou o rozdělování zdrojů, které jsou ze své podstaty omezené. Ať už je výuka ekonomie realizována na filozofických fakultách, nebo na fakultách ekonomických, technických či jiných, stále zůstává vědou společenskou. Jako každá věda musí mít svou metodologii, musí mít způsoby, jak budovat a prověřovat teorie, jak testovat hypotézy a jak odpovídat na výzkumné otázky. A právě tento aspekt ji směřuje zpět k vědám přírodním a ještě o kousek dále, až k matematice.

Proto tento text o spojení matematiky a ekonomie. Ne jako strašák pro společenskovědně zaměřené studenty, ale jako důkaz toho, že formální modely a matematika mohou pomoci pochopit komplikované vztahy, mohou umožnit vhled a porozumění. A v neposlední řadě mohou také nabídnout řešení zásadních otázek, jako např. jak provádět experimenty v ekonomii, aniž bychom poškodili jednotlivé aktéry ekonomického systému.

Tento text je určen primárně studentům Katedry ekonomických a manažerských studií (KEMS) FF UP jako studijní materiál pro základní kurz Matematiky pro studenty s ekonomicko-manažerským zaměřením a také jako doplňkový studijní materiál pro další matematicky a ekonomicky zaměřené předměty. Cílem textu je ukázat, jaké modely je možné v ekonomii používat, jaká je jejich přidaná hodnota a jak je možné základní matematické znalosti nabyté na střední a vysoké škole aplikovat na konkrétní typy problémů.

Text vychází ze studijních opor vytvořených pro předmět Matematická ekonomie na PřF UP v rámci projektu OPVK „Modernizace studia aplikované matematiky na PřF Univerzity Palackého v Olomouci" CZ.1.07/2.2.00/15.0243. Ty byly upraveny a výrazně rozšířeny do podoby učebnice pro potřeby studentů ekonomických oborů na KEMS.

Jan Stoklasa
Olomouc, červen 2023

Obsah

Část I
Matematická ekonomie

Tato část studijní opory poskytuje základní úvod k použití matematických nástrojů v ekonomii, odvození a formální modely základních pojmů atd. Po prostudování této části textu by student měl být vybaven formálními nástroji pro pochopení a reprezentaci základních ekonomických pojmů a vztahů.

Následující text by měl sloužit jako studijní opora předmětů matematická ekonomie, aplikace matematiky v ekonomii a podobných předmětů vyučovaných na Univerzitě Palackého v Olomouci. Ačkoliv bývá obvyklým záměrem studijních opor poskytnout studentům informace z přednášek v přehledné a zhutněné podobě, ze které se pak mohou snáze připravovat na zkoušky, tento text si klade i jiný cíl. Byl bych velice rád, kdyby při listování tímto textem napadaly čtenáře stále nové a nové otázky, kdyby se text stal podnětem k zamyšlení. Zamyšlení o čem? O spojení humanitní vědy – ekonomie – s vědou o poznání techničtější – matematikou. Ačkoliv se každá z těchto věd pokouší popsat okolní svět jiným jazykem (a mnohdy se pokouší popsat i úplně jiné části našeho světa), mají i mnohé styčné plochy. Ekonomie (ať už ji chápeme jako aplikovanou nebo jako čistě teoretickou) může pak ze spojení těchto zdánlivě nesourodých přístupů nemálo získat.

Kapitola 1
Matematická ekonomie, matematika v ekonomii, ekonomické a matematické modely

Cíle
Prostudování této kapitoly umožní čtenáři:

- porozumět roli matematické ekonomie jako vědní disciplíny a jejímu významu pro ekonomii,
- získat povědomí o nejčastěji používaných matematických prostředcích a disciplínách v ekonomii,
- uvědomit si potřebnost matematiky jako jazyka ekonomie,
- poznat nesnadnost provádění experimentů v ekonomii a využití matematiky pro dokazování ekonomických zákonitostí,
- seznámit se se základní kroky tvorby modelu v matematické ekonomii.

1.1 Úvod

Pokud spatřujeme smysl vědy a jednotlivých vědních disciplín ve snaze popsat a vysvětlit jevy, které se vyskytují kolem nás, musí nutně každá vědní disciplína disponovat nástroji, které jí umožní rozhodnout o platnosti hypotéz, kterými se snaží jevy vysvětlit. Dobrým způsobem, jak prověřit platnost vyřčené hypotézy, je experiment. Ekonomie má z tohoto pohledu jedno omezení, které se může v některých situacích jevit jako dosti zásadní. V mnoha případech (zejména v otázkách makroekonomických) je velice obtížné nebo dokonce nemožné experimenty provádět, ať už z morálních či jiných důvodů. Těžko si dokážeme představit, že bychom ve jménu ekonomického poznání nechali zbankrotovat několik rodin či velkých podniků, že by stovky lidí přišly o práci atd. Ekonomie zkoumá a vyslovuje také hypotézy týkající se nás všech, našeho blahobytu, našeho uplatnění se na trhu atd. Jakékoliv kontrolování nezávisle proměnných a manipulace s nimi pak má nutně dopady na reálné lidi, podniky či dokonce státy. Provádění experimentů je tedy spojeno se značnou mírou odpovědnosti. V makroekonomickém měřítku navíc není možné skutečně prověřit, jak ovlivní výsledek (závisle proměnnou) volba více hodnot nezávisle proměnné. Rozhodneme-li se pro experiment, můžeme si zvolit pouze jedinou z hodnot nezávisle proměnné a čekat na výsledek. Ostatní hodnoty nezávisle proměnné nemáme jak prověřit (ekonomika ČR je jen jedna – můžeme zjistit, jestli daná opatření pomohou najít cestu z krize; tím si však zavíráme cestu k tomu, abychom mohli posoudit úspěšnost jiných opatření). Tato skutečnost je částečně dána samotným předmětem studia ekonomie. Tam, kde experiment není možné realizovat, ale může být možné vytvořit model daného systému a pokusit se alespoň o simulaci. Právě zde nastává průnik matematiky s ekonomií, právě zde se dostáváme na půdu matematické ekonomie.

1.2 Cíle matematické ekonomie, předmět studia

Pokud bychom měli popsat předmět studia matematické ekonomie, mohli bychom říci, že jde o vědu zkoumající ekonomické závislosti matematickými prostředky. Vychází tedy z ekonomického know-how (popisu systému a terminologie), které posléze formalizuje matematickými prostředky. Jako každá věda, i matematická ekonomie si klade za cíl:

- popsat,
- vysvětlit,
- predikovat.

Půjde nám tedy o vytváření matematických modelů ekonomické reality (ekonomických modelů), pomocí nichž budeme ekonomickou realitu nejen výstižně charakterizovat, ale které také umožní vhled do základních souvislostí a analýzu celého popisovaného systému. To vše děláme samozřejmě proto, abychom mohli předvídat vývoj daného systému v čase či jeho reakce na změny jednotlivých parametrů. Jestliže bychom se na ekonomii dívali spíše jako na analytickou (převážně teoretickou) vědu, pak můžeme hovořit o matematice jako o jejím jazyce. Mnozí by jistě mohli namítat, že ekonomie je inspirována mnoha dalšími oblastmi lidského poznání, jako jsou filozofie, sociologie, psychologie, právo a mnohými dalšími, v nichž bychom matematiku jako univerzální jazyk zaváděli pouze obtížně. Matematická ekonomie je potom tou součástí ekonomie, kde matematiku jako jazyk nejen má smysl používat, ale kde ekonomie může z využití matematiky profitovat.

1.3 Matematika v ekonomii

Pojďme se nyní krátce zamyslet nad tím, které matematické oblasti a pojmy můžeme v matematické ekonomii uplatnit:

- funkce jedné i více proměnných
- řešení soustav rovnic
- diferenciální počet (extrémy a průběh funkce, vázané extrémy funkcí)
- integrály

- diferenční a diferenciální rovnice
- optimalizace
- mnohé z oblastí statistiky
- matematické programování
- vícekriteriální rozhodování
- teorie her
- teorie grafů
- teorie množin
- teorie fuzzy množin
- jazykově orientované modelování
- téměř všechny oblasti operačního výzkumu aj.

Uvedený výčet zcela jistě není úplný. Je tedy zřejmé, že matematika má ekonomii co nabídnout. Nyní už se zaměříme na konkrétní oblasti ekonomické reality a na matematické metody, které je možné pro jejich popis či analýzu využít. Je snad jasné, že následující text v žádném případě nepodává vyčerpávající popis všech možností. To ani není jeho cílem. Má spíše naznačit, jakými směry je možné se vydat v matematické ekonomii, dát čtenáři možnost nahlédnout, jak lze o ekonomické realitě uvažovat z matematické perspektivy. Neodpustím si ještě jednu malou poznámku: Je možné, že matematický pohled bude někdy znamenat pokládání si otázek, které zpochybňují (byť částečně) některá důležitá ekonomická východiska. Proč by to nemohla být role právě nás, matematiků: ptát se „A co když to je jinak?“, „Musí to být takto?“, „Proč je to tak?“, „Má smysl vždy předpokládat toto?“ Jestli se mi podaří vyvolat ve vás při čtení tohoto textu alespoň jednou otázku podobného typu, pak budu spokojen, neboť jsem jej nepsal zbytečně. Právě otázky posouvají lidské vědění dopředu. Buďme tedy těmi odvážnými a ptejme se!

1.4 Tvorba modelu v matematické ekonomii

Smyslem matematického (i ekonomického) modelování je získat kvalifikovaně zjednodušenou reprezentaci popisovaného systému (reality), tzv. *model*. Ten má systém, o jehož popis/pochopení či predikci se snažíme, dostatečně výstižně reprezentovat. Obvykle nám jde o zachycení podstatných *prvků systému* a důležitých *vazeb mezi nimi*. Snažíme se přitom sestavit model co nejjednodušší, aby byl výpočetně zvládnutelný a dobře analyzovatelný. Základní požadavky kladené na dobrý matematický model jsou obvykle následující:

1. Máme jasně deklarovány *předpoklady modelu* (tj. víme, z čeho vycházíme a co považujeme za vždy platné). Jestliže jsou splněny předpoklady modelu, pak závěry z něj plynoucí mohou být použity a interpretovány. Jestliže však předpoklady modelu splněny nejsou, jeho výstupy mohou být zkreslené nebo pro daný účel naprosto irelevantní. Je tedy vždy nezbytné předpoklady modelu znát a kontrolovat jejich naplnění (v případě, že model používáme), resp. jasně vymezit a popsat (v případě, že model vytváříme).

2. Ještě před tvorbou modelu *věnujeme dostatečnou pozornost vstupním a výstupním proměnným modelu.* Měli bychom definovat, jakého typu tyto proměnné jsou, na jakých univerzech se jejich hodnoty pohybují atd. Měli bychom také vědět, jak vypadá „dobrý výstup“ – tj. být schopni rozpoznat špatný nebo podezřelý výstup (vhodné je také mít dobrou představu o tom, jak se s výstupy modelu bude pracovat dále, tj. k čemu budou používány). Měli bychom zvážit, kolik a jakých dat máme k dispozici pro ladění modelu a jak dobře jsme schopni popsat vztah mezi vstupy modelu a jeho očekávanými výstupy. Toto vše totiž výrazně ovlivňuje výslednou podobu modelu a také do značné míry určuje, jaké matematické metody budou při jeho tvorbě použity. V neposlední řadě je zamyšlení se nad dostupnými vstupními a výstupními daty zásadní také pro naši schopnost posoudit správnost fungování modelu.
3. Do modelu *zahrnujeme pouze prvky a vztahy*, které jsou *pro daný účel podstatné*. Musíme si přitom být jisti, že jsme žádný podstatný prvek nebo vztah nevynechali.
4. Do modelu *nezahrnujeme prvky a vztahy, které jsou nevýznamné* (to souvisí s požadavkem na co největší jednoduchost modelu).
5. Model by měl abstrahovat od významů. Měli bychom tedy být schopni model aplikovat na celou třídu podobných systémů. Abstrahování od významů však neznamená naprosté odtržení modelu od reality. Zejména v ekonomii musíme dbát na to, aby pokud možno každý prvek modelu byl v každém okamžiku jednoznačně interpretovatelný (pojmenovatelný „ekonomickým jazykem“).
6. Měli bychom být schopni prověřit funkčnost modelu a rozhodnout, je-li dostatečně přesnou reprezentací modelovaného systému.

Jak už jsme si uvedli dříve, půjde nám nyní především o popis ekonomické reality jazykem matematiky. Rozdělme si pro názornost proces tvorby modelu v matematické ekonomii do následujících fází:

Tvorba ekonomického modelu Nejdříve je nutné získat dostatečně detailní popis modelovaného problému/systému, včetně ekonomických vztahů a souvislostí. Tento popis můžeme očekávat v jazykové podobě. Nezbytnou součástí zakázky na vytvoření modelu je popis jeho očekávaných vstupů a požadovaných výstupů. Měli bychom mít k dispozici také informaci o tom, jak bude s výstupy modelu (nebo s celým modelem) nakládáno, k jakému účelu má sloužit. Měli bychom se pokusit identifikovat podstatné proměnné a vztahy. Tato fáze tedy vyžaduje, abychom byli schopni alespoň do určité míry porozumět modelovanému systému a jeho fungování (ať už na základě slovního popisu systému expertem, nebo na základě našeho studia daného systému).

Tvorba matematického modelu V této fázi formalizujeme popis systému a jednotlivým prvkům a vztahům mezi nimi přiřazujeme vhodné matematické objekty. Cílem je vytvořit matematický model, který bude odpovídat modelu ekonomickému.

Ladění matematického modelu Prověřujeme, jestli model odráží správně vztahy mezi prvky systému a dobře jej popisuje jako celek. Pro tyto účely bychom měli mít k dispozici vhodná ladicí data (např. vstupy, k nimž známe správný/očekávaný výstup) v dostatečném množství.

Interpretace závěrů/výstupů modelu První fáze tvorby modelu probíhala na ekonomické (jazykové) úrovni. Výsledky vyladěného modelu však stále zůstávají v rovině čistě matematické, a tudíž abstrahované od významu. Je třeba jim v této fázi přiřadit odpovídající význam a správně výstupy modelu interpretovat ekonomickou terminologií.

Bylo by vhodné na tomto místě uvést, že tak jako proces tvorby matematického modelu, ani proces tvorby modelu v matematické ekonomii neprobíhá vždy nutně lineárně a nerespektuje vždy výše uvedenou posloupnost činností. Je možné, že z některé fáze bude nutné se vrátit do fáze předchozí, protože se objeví informace, které to vyžadují. Tato nelinearita v procesu tvorby modelu by měla přispět ke zkvalitnění výsledného modelu. Pokud jsme nuceni vracet se k některému z předchozích bodů, protože jsme jeho provedení „podcenili“ nebo jsme „něco přehlédli“, jde o zbytečné prostoje, kterým je možné předejít pochopením zásad tvorby modelu a především získáním praktických zkušeností s touto činností.

Upozornění

Tvorba matematického modelu, jeho ladění a interpretace výstupů je sama o sobě proces, který by bylo možné ještě dále dělit. Skládá se z velkého množství činností, přičemž klíčovou roli hraje *porozumění modelovanému systému, dostupnost vhodných dat* pro *prověření správnosti/vhodnosti navrženého modelu* a také *schopnost interpretovat výsledky v kontextu modelované reality*. K tomu může napomoci také správně provedená *analýza citlivosti*.

Shrnutí

Matematickou ekonomii je možné chápat v různých souvislostech různě:
a) jako matematiku použitou pro ekonomické výpočty,
b) jako formální jazyk ekonomie,
c) jako náhradu důkazového aparátu ekonomie,
d) jako komplexní disciplínu zahrnující všechny tyto funkce.
Cílem matematické ekonomie (zejména chápané ve smyslu písmene d)) je popsat, vysvětlit a predikovat ekonomické systémy, jejich fungování a vývoj. Téměř každá oblast matematiky, s níž jste se doposud v rámci svého studia setkali, může nalézt své uplatnění v ekonomii. V ekonomii popravdě nalézají uplatnění také mnohé oblasti matematiky, s nimiž jste se doposud ještě nesetkali, výrazně do ní vstupují také poznatky a nástroje informatické atd. Tvorba modelu v matematické ekonomii má své zákonitosti a prochází několika fázemi – od formulování problému a

ekonomického modelu po tvorbu matematického modelu, jeho prověření a interpretaci výsledků. Nedá se přitom říci, že by proces ekonomického modelování byl vždy lineární a probíhal po ose start-cíl. Často je nutné vracet se zpět, kontrolovat, jestli vše stále dostatečně věrně odpovídá modelovanému systému, dělat úpravy atd. Kontrola až ve fázi hotového modelu může znamenat nutnost vrátit se úplně na začátek, pokud model neodpovídá našim potřebám. Přesto je rozumné s modely v ekonomii pracovat – poskytují nám totiž zjednodušení (při zachování vypovídací hodnoty). A jednodušší reprezentace usnadňuje pochopení zásadních souvislostí, vztahů a zákonitostí.

Otázky k zamyšlení

- Zkuste se sami zamyslet, jaké informace byste chtěli získat od analytika, u nějž si objednáte analýzu vaší firmy (nebo celé ekonomiky), případně její model? Budou vám stačit číselné výstupy? Budete chtít znát souvislosti mezi nimi, možná omezení nebo úskalí interpretace?
- Jak se přesvědčíte, že model, který vám analytik dodal, funguje správně? Jaké otázky budete klást a komu?
- Jak byste formulovali zadání pro analytika? Budete specifikovat také zamýšlené použití výstupů modelu? Budete specifikovat, jak výstupy mají vypadat?
- Jak byste sami postupovali, kdybyste měli vytvořit jednoduchý ekonomický (ekonomicko-matematický) model, např. pro účely predikce vývoje poptávky po výrobcích vaší firmy?
- Dokážete jmenovat nějaké ekonomické modely, u nichž jsou jasně stanoveny předpoklady (např. ceteris paribus)? Dokážete říci, co se změní, pokud jsou tyto předpoklady porušeny?

Další zdroje informací

Baldani, J., Bradfield, J., Turner, R. W. (2005) *Mathematical economics*. Thomson South-Western, 2. vydání. ISBN 0324183321.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie I*. VŠB-TU, Ostrava.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie II*. VŠB-TU, Ostrava.

Hands, D. W. (2004) *Introductory mathematical economics*. Oxford University Press, 2. vydání. ISBN 0195133781.

Soper, J. (2004) *Mathematics for economics and business: an interactive introduction.* Wiley-Blackwell, 2. vydání. ISBN 1405111275.

Kapitola 2
Funkce v ekonomii

Cíle
Prostudování této kapitoly umožní čtenáři:

- získat povědomí o matematických pojmech nejčastěji používaných v ekonomii a o způsobu práce s nimi při ekonomickém modelování,
- poznat způsob analýzy funkcí více proměnných často používaný v ekonomii (průměty řezů funkce, comparative statics),
- porozumět významu celkových, průměrných a mezních veličin při ekonomických analýzách,
- být schopen na životním cyklu výrobku demonstrovat význam zavedení funkcí průměrných veličin.

2.1 Úvod

Ekonomie často používá pro popis vztahů mezi jednotlivými jednotkami modelovaného systému funkce. V této kapitole si ukážeme, jak vypadá ekonomická analýza funkčních závislostí jak pro funkce jedné proměnné, tak i pro funkce více proměnných. Upozorníme na některá specifika ekonomické analýzy a zaměříme se na analýzu grafů funkcí. Zavedeme si veličiny celkové, průměrné a mezní a objasníme si jejich význam pro účely ekonomické analýzy. Na životním cyklu výrobku pak zkusíme tyto znalosti aplikovat.

2.2 Funkce v ekonomii

Nejčastějším způsobem matematického popisu vztahů mezi ekonomickými veličinami jsou funkce. Ekonomové v literatuře pro základní kurzy často uvažují funkce jedné proměnné (těchto vztahů je obvykle docíleno dodáním zjednodušujících předpokladů ke komplexnějším modelům/vztahům). Mnohdy je však nutné v některých souvislostech používat pro popis vztahů mezi prvky modelovaného systému funkce více proměnných. Z ekonomické interpretace (teorie) vyplývá, které z proměnných jsou nezávisle proměnné (tj. které jsou příčinami) a které jsou závisle proměnné (tj. důsledky). *Nezávisle proměnná* je obecně ta proměnná, jejíž hodnoty buď máme pod kontrolou, nebo je můžeme nějak přímo ovlivňovat. *Závisle proměnná* je pak ta proměnná, jejíž hodnoty se mění jako důsledek změn hodnot nezávisle proměnné (či proměnných). Rozlišení závisle a nezávisle proměnných může v případě, že žádnou z proměnných nemáme pod kontrolou nebo nemůžeme přímo ovlivňovat, probíhat na základě ekonomické teorie (předpokládaná příčina je nezávisle proměnnou, předpokládaný následek závisle proměnnou), případně na základě toho, kterou z proměnných jsme schopni měřit (měřitelná proměnná obvykle vystupuje v roli nezávisle proměnné, hůře měřitelná nebo neměřitelná v roli závisle proměnné).

Obecně můžeme tedy vztah mezi proměnnými $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a proměnnou y značit $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. V tomto případě předpokládáme, že y je závisle proměnná a $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jsou nezávisle proměnné. Dále můžeme v modelech uvažovat *konstanty* a *parametry*, které plní různé funkce.

Pro základní popis vztahu mezi proměnnými nás může zajímat například:

Trend křivky V případě funkcí jedné proměnné popisuje převažující/obecné chování závisle proměnné při změnách hodnot nezávisle proměnné – např. lineární trend, kvadratický trend, exponenciální trend, …). Ze znalosti trendu můžeme odvozovat i krátkodobé predikce atd.

Konvexnost/konkávnost funkce Souvisí s rychlostí nárůstu a poklesu funkce. Funkce, jejíž nárůst zpomaluje (tj. je *degresivně rostoucí*) nebo jejíž pokles zrychluje (*progresivně klesající*) je *konkávní*. Funkce, jejíž nárůst zrychluje (je *progresivně rostoucí*) nebo jejíž pokles zpomaluje (je *degresivně klesající*) je *konvexní*. Tyto vlastnosti funkcí souvisejí s ekonomickými pojmy jako např. rostoucí/klesající výnosy z rozsahu.

Inflexní body Body, v nichž se mění konvexnost na konkávnost nebo naopak.

Lokální extrémy funkce Jde o *lokální minima a maxima funkce*. Jde tedy o body, na jejichž blízkém okolí má funkce buď jen vyšší hodnoty (případ lokálního minima), nebo jen nižší hodnoty (případ lokálního maxima). Právě tyto body jsou těmi, které hledáme při optimalizaci.

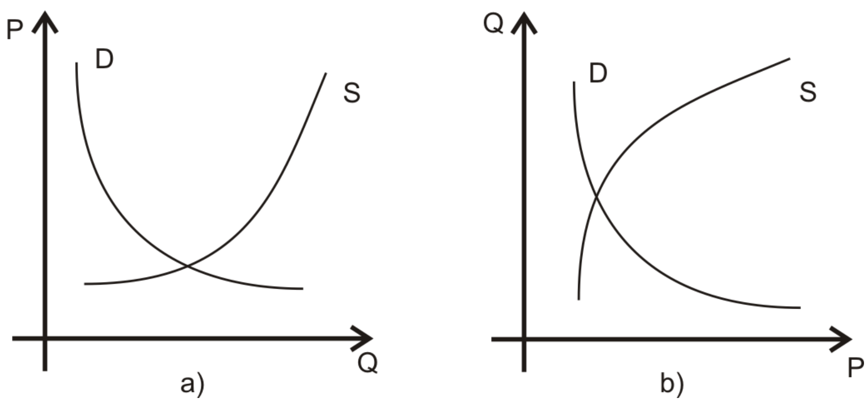
Globální extrémy funkce Jde o *globální minima a maxima* funkce – tedy absolutní extrémy. Globálního minima nabývá funkce v tom z lokálních minim, ve kterém je její funkční hodnota nejnižší. Globálního maxima nabývá funce v tom z lokálních maxim, ve kterém je její funkční hodnota nejvyšší. Na uzavřeném intervalu má spojitá funkce vždy globální minimum a maximum (na otevřeném intervalu a pro nespojité funkce to platit nemusí).

Průsečíky funkcí Průsečíky grafů funkcí definují body, v nichž platí zároveň všechny vztahy popsané jednotlivými protínajícími se funkcemi. Graficky odpovídají řešení rovnic typu $f_1(x) = f_2(x)$. V bodě x, pro nějž uvedená rovnost platí, mají obě funkce stejnou funkční hodnotu y, jinak řečeno bod $[x, y]$ vyhovuje jak funci f_1, tak i f_2, tj. $f_1(x) = y$ a $f_2(x) = y$.

Elasticita funkce Elasticita funkce popisuje velikost reakce závisle proměnné na změnu hodnoty nezávisle proměnné, a to v relativním vyjádření. Popisuje tedy, o kolik procent se změní hodnota závisle proměnné při změně hodnoty nezávisle proměnné o jedno procento. Blíže bude o elasticitě pojednáno dále v textu.

Graf funkce Graf funkce je grafickým shrnutím průběhu funkce. Dává nám možnost chování funkce vizualizovat (jsme však do jisté míry omezeni množstvím dimenzí, které je ještě možné rozumně vizualizovat). Ekonomie často využívá grafy k vysvětlení pojmů a zákonitostí.

Zejména poslední zmíněné – tedy grafy – jsou v ekonomii často využívány k dedukčním účelům. Z grafů může být usuzováno na vztahy mezi proměnnými či jejich vlastnostmi atd. Jako matematici bychom si měli uvědomovat možná úskalí takovéhoto přístupu a vždy dobře zvažovat, které informace jsou z grafu odvoditelné a jaká je možnost jejich zobecnitelnosti. Graf se zdá být tak jasným a jednoduchým k interpretaci, že málokdy bývají stanoveny všechny podmínky a omezující předpoklady, za nichž vznikl. Pokud je nevezmeme všechny v úvahu, můžeme se při zobecňování snadno dopustit chyb. Je třeba mít vždy na paměti, že jakékoliv závěry odvozené z grafu platí jen pro daný graf (a daný tvar funkcí v něm vyobrazený) – zobecnění v tomto případě není nezbytně jednoduché. O této problematice se nicméně zmíníme ještě dále v textu. Je také dobré si uvědomit, že ekonomové ne vždy dodržují (z aplikačních důvodů) konvenci na svislou osu zakreslovat hodnoty závisle proměnné a na vodorovnou osu hodnoty nezávisle proměnné (viz obrázek 2.1). O to důležitější ale je vždy jasně deklarovat, která z proměnných v grafu je závisle proměnná a která je nezávisle proměnná. Jasné popisky všech os grafu jsou samozřejmě nutností. *Graf bez popsaných os má nulovou informační hodnotu!*

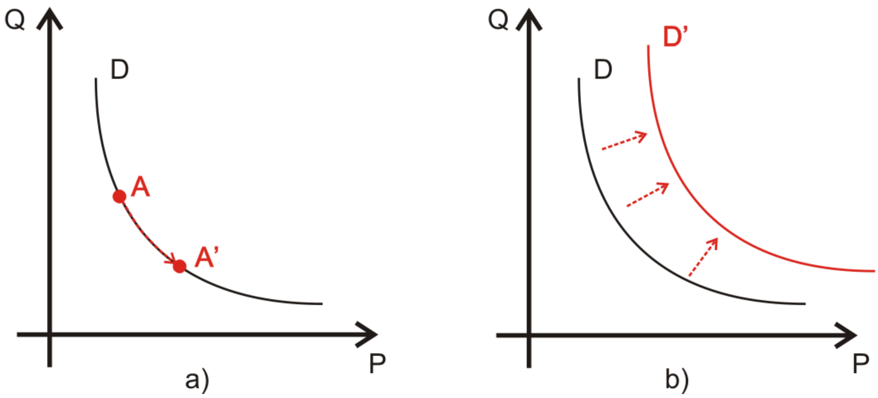


Obrázek 2.1 Graf nabídkové křivky (S; supply) a poptávkové křivky (D; demand) z pohledu ekonomického (a) a matematického (b).

Pro lepší orientaci v ekonomické terminologii (a tedy v literatuře určené pro základní kurzy ekonomie) má smysl si připomenout několik základních pojmů.

Posun po křivce Jde o změnu hodnoty závisle proměnné vyvolanou změnou hodnoty nezávisle proměnné. V grafu (obrázek 2.2a) odpovídá tomuto procesu pohyb bodu po dané křivce (při zachování nezměněné funkční závislosti).

Posun křivky Tento termín popisuje změnu funkční závislosti (vyvolanou jinou volbou parametrů modelu, změnou podmínek atd. – obrázek 2.2b).



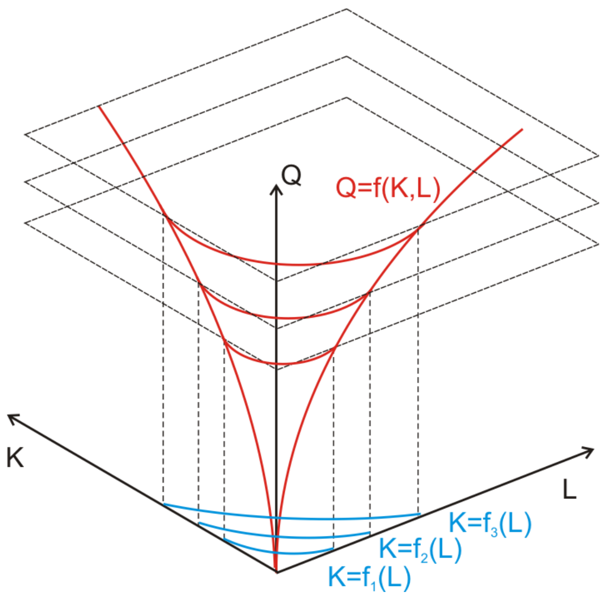
Obrázek 2.2 Posun po křivce (a) a posun křivky (b).

2.3 Reprezentace funkce více proměnných

Pro jednoduchost se nyní zaměříme jen na funkce dvou proměnných. Pro znázornění funkce dcou proměnných (např. produkční funkce bývá často zapisována ve tvaru $Q = f(K,L)$, t.j. vyprodukované množství je funkcí dvou výrobních faktorů – kapitálu (K) a práce (L)) je možné využít některý z následujících přístupů. Přidržíme se přitom právě příkladu produkční funkce $Q = f(K,L)$:

1. Zakreslit graf funkce ve 3D (tj. jako plochu nad rovinou definovanou proměnnými K a L). Tomuto přístupu v analýze odpovídá počítání s klasickou funkcí dvou proměnných. Při hledání maxima tedy řešíme úlohu nalezení extrému funkce dvou proměnných (optimalizační úloha, obvykle s podmínkami). Tato reprezentace je sice názorná, ale může být náročné ji vygenerovat. Navíc je potřeba být schopen s vygenerovaným grafem otáčet, aby všechny informace ve tvaru funce obsažené mohly být rozpoznány a využity.
2. Reprezentovat plochu zmíněnou v předchozím bodě pomocí vrstevnic, tj. pomocí průsečnic plochy s rovinami rovnoběžnými s rovinou určenou K a L (ve skutečnosti nevyužíváme přímo vrstevnic grafu funkce, ale jejich průmětů do roviny K, L – viz obrázek 2.3. Pro produkční funkci tak dostáváme *izokvantovou mapu*, tj. soubor křivek $K = f_i(L)$, takových, že všechny body na téže křivce odpovídají stejné produkci. Jinak řečeno, pro každé $i \in \mathbb{R}_0^+$ máme

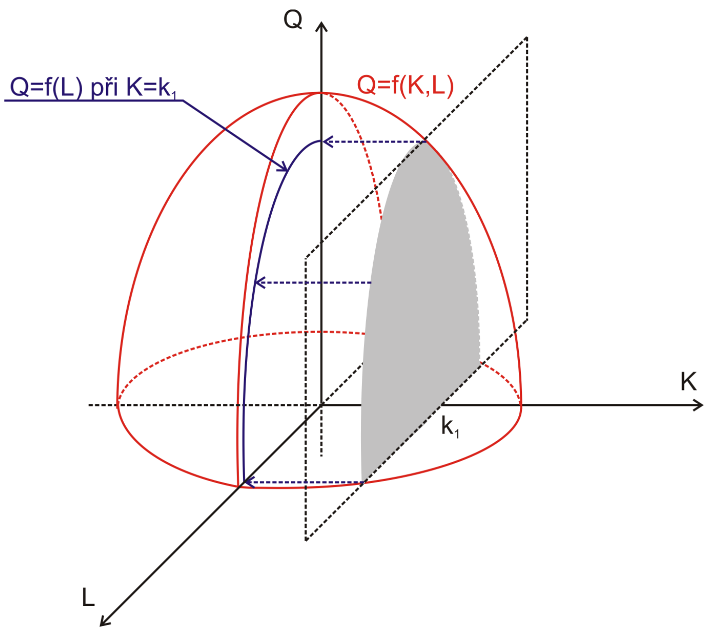
$Q = f(f_i(L), L) = i$ pro libovolné L. Při analýze teorie spotřebitele analogicky získáme *indiferenční mapu*. Pro nalezení maxima produkční funkce bychom hledali izokvantu odpovídající nejvyšší úrovni produkce, která ještě odpovídá nějakému bodu z přípustné množiny. Vícerozměrnou funkci tedy převádíme do dvou rozměrů tak, že její tvar reprezentujeme projekcemi vrstevnich (jedná se o přímou analogii toho, jakým způsobem reprezentujeme tvar kopců na turistických mapách pomocí vrstevnic).



Obrázek 2.3 Průměty vrstevnic plochy Q do roviny určené K a L. Výsledkem jsou izokvanty $K = f_i(L)$.

3. Využití tzv. *comparative statics* – tj. funkci dvou proměnných reprezentujeme funkcí jedné proměnné tak, že druhou proměnnou zafixujeme na nějaké fixní hodnotě. Pokud si opět za příklad funkce dvou proměnných vezmeme produkční funkci $Q = f(K, L)$, můžeme ji popsat *produktivitními funkcemi* $Q = f(K)$ pro $L = konst.$ a $Q = f(L)$ pro $k = konst.$; značit pak můžeme pro každou konstantu $k \in \mathbb{R}_0^+$ (nemá smysl uvažovat záporné hodnoty K a L) $Q = f(K) |_{L=k}$ a $Q = f(L) |_{K=k}$. Na obrázku 2.4 je proces odvození produktivitní funkce práce $Q = f(L)$ při dané hodnotě kapitálu $K = k_1$ ilustrován na produkční funkci, jejíž tvar byl volen tak, aby ilustrace byla co nejnázornější a aby její ekonomická interpretace nebyla úplně nesmyslná.

Při zobrazování funkce více než dvou proměnných pak buď v rámci comparative statics fixujeme hodnoty více proměnných, nebo se snažíme (v případě funkcí tří až čtyř proměnných) využít další možnosti grafického znázornění – nabízí se např. izokvantové plochy, případně dynamické grafy měnící se se změnou hodnoty třetí



Obrázek 2.4 Comparative statics – ilustrace odvození produktivitní funkce práce $Q = f(L)$ při fixní hodnotě kapitálu k_1.

proměnné. V každém případě v základních kurzech ekonomie převažuje snaha redukovat maximum grafických reprezentací do dvou rozměrů. Další analýza vztahů mezi ekonomickými veličinami se pak obvykle opírá o vlastnosti funkcí, jimiž dané vztahy modelujeme. Z praktického (chcete-li aplikačního) pohledu mají největší význam zejména následující pojmy.

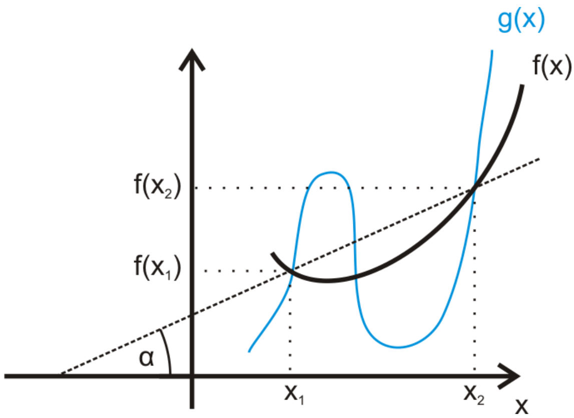
2.4 Sklon ekonomické křivky

Sklon ekonomických křivek nás zajímá proto, že reprezentuje velikost změny závisle proměnné při dané změně nezávisle proměnné. Z praktického hlediska má pro ekonomické aplikace smysl rozlišovat sklon průměrný a mezní. Podíváme se na každý z nich blíže a připomeneme si jejich definice a základní zásady jejich využívání.

2.4.1 Průměrný sklon křivky (AP – average propensity)

Tato veličina popisuje sklon křivky na daném intervalu. Používá se např. tam, kde nezávisle proměnná není dokonale dělitelná (kde není myslitelná její nekonečně malá změna). Používá se také, pokud nás zajímá skutečně průměrná hodnota nárůstu nějaké veličiny za delší časové období. Pokud bychom měli vyjádřit, co průměrný sklon křivky popisuje slovy, mohli bychom říci, že *dává informaci o tom, jaký nárůst funkční hodnoty (tj. hodnoty závisle proměnné) připadá průměrně na každou jednotku nezávisle proměnné ze sledovaného intervalu*. Uvažujeme-li obecnou funkci $y = f(x)$, pak průměrný sklon této funkce na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ můžeme určit pomocí vzorce (2.1), kde α je úhel, který svírá sečna (přímka určená body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ s osou x. Vše výše uvedené shrnuje obrázek 2.5.

$$AP = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = \frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \mathrm{tg}(\alpha) \tag{2.1}$$

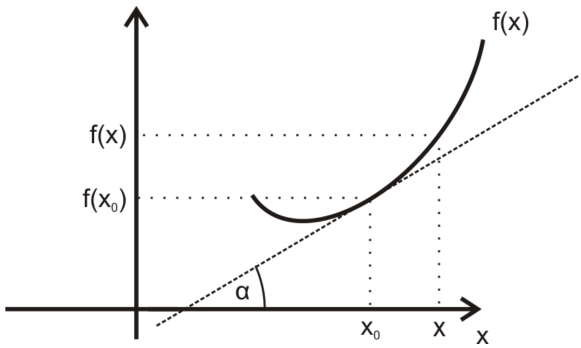


Obrázek 2.5 Průměrný sklon funkcí $y = f(x)$ a $y = g(x)$ na intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ je popsán pomocí $\mathrm{tg}(\alpha)$.

Pokud použijeme průměrný sklon křivky pro popis jejího trendu na větším intervalu, můžeme se snadno dopustit chyb. Jak je patrné z výše uvedeného vzorce (2.1) a obrázku 2.5, průměrný sklon závisí pouze na krajních bodech daného intervalu a jejich funkčních hodnotách. Jakékoliv kolísání funkce mezi těmito krajními body tedy není v průměrném sklonu zohledněno. Proto musíme být opatrní při používání této charakteristiky a vždy mít na paměti, jaká omezení jsou s ní spojena.

2.4.2 *Mezní sklon křivky (MP – marginal propensity)*

Mezní sklon křivky popisuje sklon křivky v bodě. Říká nám, jaký je nárůst funkční hodnoty (hodnoty závisle proměnné) vyvolaný nekonečně malou změnou nezávisle proměnné. Jedná se v principu o limitní případ průměrného sklonu, kdy $\Delta x \to 0$ (tedy kdy délka sledovaného intervalu je nekonečně malá). Geometricky je reprezentován směrnicí tečny ke grafu funkce v daném bodě (viz obrázek 2.6). Můžeme jej tedy definovat s využitím diferenciálního počtu.



Obrázek 2.6 Mezní sklon funkce $y = f(x)$ v bodě x_0 je popsán pomocí $\mathrm{tg}(\alpha)$.

Nechť je $y = f(x)$ spojitá diferencovatelná funkce na intervalu $\langle x_1, x_2\rangle$, pak mezním sklonem této funkce v bodě $x_0 \in \langle x_1, x_2\rangle$ rozumíme hodnotu $f'(x_0)$ vypočtenou na základě (2.2).

$$MP_{x_0} = \frac{dy}{dx}\Big|_{x=x_0} = f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \mathrm{tg}(\alpha), \qquad (2.2)$$

kde α je úhel, který svírá tečna ke grafu funkce $f(x)$ v bodě $[x_0, f(x_0)]$ s osou x. Mezní sklon v bodě x_0 nám popisuje, jak se funkce chová v blízkém okolí bodu x_0. Můžeme snadno odvodit, že funkce $f(x)$ je v bodě x_0:

- **rostoucí** právě tehdy, když $f'(x_0) > 0$,
- **klesající** právě tehdy, když $f'(x_0) < 0$,

třetí variantou pak je, že

- $f'(x) = 0$, z čehož můžeme odvodit, že funkce má v daném bodě buď **extrém**, nebo **inflexní bod** (tj. bod, v němž se mění z konvexní na konkávní).

Jestliže má funkce tutéž vlastnost v každém bodě $x \in \langle x_1, x_2\rangle$, pak můžeme říci, že má tuto vlastnost na daném intervalu, tedy funkce:

- **je rostoucí na** $\langle x_1, x_2\rangle$ právě tehdy, když $f'(x) > 0$, pro každé $x \in \langle x_1, x_2\rangle$,
- **je klesající na** $\langle x_1, x_2\rangle$ právě tehdy, když $f'(x) < 0$, pro každé $x \in \langle x_1, x_2\rangle$,
- **je nerostoucí na** $\langle x_1, x_2\rangle$ právě tehdy, když $f'(x) \leq 0$, pro každé $x \in \langle x_1, x_2\rangle$,
- **je neklesající na** $\langle x_1, x_2\rangle$ právě tehdy, když $f'(x) \geq 0$, pro každé $x \in \langle x_1, x_2\rangle$,
- **je konstantní na** $\langle x_1, x_2\rangle$ právě tehdy, když $f'(x) = 0$, pro každé $x \in \langle x_1, x_2\rangle$.

Tímto jsme tedy popsali sklon funkce v bodě a na daném intervalu. Může nás také zajímat, jak se v okolí daného bodu sklon funkce mění. Za tímto účelem použijeme druhou derivaci funkce $f(x)$, tj. $f''(x)$, z níž můžeme usuzovat, že **sklon funkce** $f(x)$:

- **roste na okolí bodu** x_0 právě tehdy, když $f''(x_0) > 0$. Jestliže sklon funkce roste, musí tedy docházet ke zrychlování nárůstu funkce (funkce je progresivně rostoucí), nebo ke zpomalování poklesu (funkce je degresivně klesající). V obou případech je funkce na okolí bodu x_0 **konvexní**,

- **klesá na okolí bodu** x_0 právě tehdy, když $f''(x_0) < 0$. Jestliže sklon funkce klesá, musí tedy docházet ke zpomalování nárůstu funkce (funkce je degresivně rostoucí), nebo ke zrychlování poklesu (funkce je progresivně klesající). V obou případech je funkce na okolí bodu x_0 **konkávní**,
- **se v bodě** x_0 **nemění**, tj. $f''(x_0) = 0$. V tomto případě má funkce $f(x)$ v bodě x_0 inflexní bod, a v tomto bodě přechází z konvezní na konkávní, nebo naopak (případně je na okolí bodu x_0 lineární).

Více o vlastnostech funkce a o použití derivací pro vyšetřování průběhu funkce se dozvíte v základním kurzu matematiky. My se nyní zaměříme na ekonomičtější aspekty analýzy funkcí a jejich průběhu.

2.5 Veličiny celkové, průměrné a mezní

Většinu ekonomických závislostí obvykle popisujeme funkcemi celkových veličin. Má smysl uvažovat také funkce, které tyto hodnoty vztáhnou k jednotce vstupu (tedy funkce průměrných veličin), a také nás může zajímat, jaký nárůst funkce bude důsledkem navýšení vstupů o jednotku (funkce mezních veličin). Nyní si popíšeme, jak funkce celkových, průměrných a mezních veličin definovat, jaké jsou vztahy mezi nimi, jaká je jejich grafická interpretace a jaké je jejich použití.

2.5.1 Funkce celkových veličin (T_f)

$$T_f : \quad y = f(x) \tag{2.3}$$

Funkce celkových veličin reprezentovaná vztahem (2.3) popisuje přímý vztah mezi vstupními (nezávislými) a výstupními (závislými) proměnnými. Například produkční funkce $Q = f(K, L)$ popisuje vztah mezi celkovým produktem Q a množstvím práce L a kapitálu K potřebným k jeho vytvoření. Obdobně také produktivitní funkce, funkce užitku atd.

2.5.2 Funkce průměrných veličin (A_f)

$$A_f : \quad y = \frac{f(x)}{x} = \frac{T_f}{x} \tag{2.4}$$

V ekonomické interpretaci často potřebujeme poměřovat celkový výstup s množstvím vstupů potřebných k jeho dosažení. Za tímto účelem definujeme funkci průměrných veličin (A_f), která vztahuje hodnotu funkce celkových veličin k celkové hodnotě vstupů - viz (2.4). Popisuje tedy, jaká část celkového výstupu připadá v průměru na každou jednotku vstupu (nebo vstupů). Stejně tak může popisovat, jaká je průměrná hodnota nákladů na jednu jednotku produkce v případě, že funkce celkových veličin bude funkcí nákladovou. Graficky pak hodnota funkce průměrných veličin souvisí se směrnicí paprsku funkce v daném bodě (resp. se směrnicí sečny ke grafu funkce vedené body $[x_1, f(x_1)]$ a $[x_2, f(x_2)]$ v případě, že počítáme průměr mězi hodnotami x_1 a x_2; v praktických ekonomických aplikacích je často $x_1 = 0$).

2.5.3 Funkce mezních veličin (M_f)

$$
\begin{aligned}
M_f: \quad & y = f'(x) = \tfrac{df(x)}{dx} = \tfrac{dT_f}{dx} && \text{pro spojitou funkci } f(x) \\
M_f: \quad & y = \tfrac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} = \tfrac{\Delta f(x)}{\Delta x} && \text{pro diskrétní funkci } f(x)
\end{aligned}
\tag{2.5}
$$

V některých případech pro nás může být podstatná informace, jaký nárůst/pokles funkce celkových veličin je vyvolán nárůstem nezávisle proměnné o jednotku. Právě tuto informaci nese funkce mezních veličin (2.5). Na rozdíl od funkce průměrných veličin zde v ekonomické interpretaci vztahujeme přírůstek výstupu k přírůstku vstupů. Odpovídá nám tedy např. na otázku, jaký výstup je vyprodukován dodatečnou jednotkou vstupu (nebo v infinitesimálním případě, jaký nárůst výstupu vyvolalo nekonečně malé navýšení vstupů).

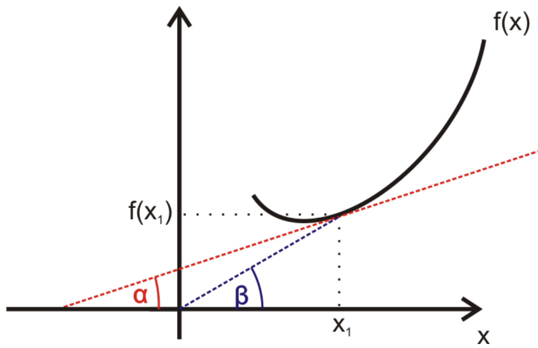
2.5.4 Grafická interpretace T_f, A_f a M_f

Grafická interpretace funkcí T_f, A_f a M_f je shrnuta na obrázku 2.7. Funkce T_f je popsána křivkou $f(x)$. Hodnota funkce průměrných veličin $A_f(x_1)$ je pro každé x_1 z definičního oboru funkce $f(x)$ (kromě nuly samozřejmě) popsána hodnotou tangenty úhlu β, tedy úhlu, který svírá paprsek (spojnice počátku souřadného systému s bodem $[x_1, f(x_1)]$) s osou x. Hodnota $A_f(x_1)$ tedy popisuje průměrný nárůst $f(x)$ připadající na každou jednotku x v rozmezí x od 0 do x_1.

Hodnota funkce mezních veličin $M_f(x_1)$ je pak tangentou směrového úhlu tečny (úhlu α) ke grafu funkce v bodě x_1. Tato hodnota popisuje, jak bude reagovat funkční hodnota funkce $f(x)$ na nekonečně malý nárůst hodnoty x_1.

2.5.5 Některé vztahy mezi T_f, A_f a M_f

Následující cvičení v úpravě výše zmíněných vzorců si klade za cíl umožnit čtenáři lépe porozumět vztahům mezi celkovými, průměrnými a mezními veličinami a také osvětlit důvod jejich zavádění.



Obrázek 2.7 Grafická interpretace funkce celkových, průměrných a mezních veličin. $T_f(x_1) = f(x_1)$, $A_f(x_1) = \mathrm{tg}(\beta)$ a $M_f(x_1) = \mathrm{tg}(\alpha)$

- Ze vztahu (2.5) víme, že $M_f = T_f' = \frac{dT_f}{dx}$. Odtud můžeme pomocí integrování snadno získat vztah pro T_f:
$$T_f = \int M_f dx \tag{2.6}$$
Jinak řečeno, funkci celkových veličin získáme jako neurčitý integrál funkce mezních veličin.
- Ze vztahu (2.4) víme, že $A_f = \frac{T_f}{x}$. Odtud si opět můžeme snadno vyjádřit vztah pro výpočet T_f pomocí A_f:
$$T_f = A_f \cdot x \tag{2.7}$$
- Nyní dáme do vztahu ještě M_f a A_f. S využitím výše uvedeného vztahu (2.7) dostáváme:
$$M_f = \frac{dT_f}{d_x} = T_f' = (A_f \cdot x)' = A_f' \cdot x + A_f, \tag{2.8}$$
kde
$$A_f' = \frac{dA_f}{dx} = \frac{d\frac{T_f}{x}}{dx} = \frac{T_f' \cdot x - T_f}{x^2} = \frac{T_f' - \frac{T_f}{x}}{x} = \frac{M_f - A_f}{x} \tag{2.9}$$

Aby bylo zřejmé, jaké jsou výhody formálního zápisu jednotlivých funkcí, podíváme se nyní na další informace, které z výše uvedených výsledků můžeme odvodit. Například pro funkci A_f máme nyní jasně dány podmínky, za kterých roste a za kterých klesá, a to ve vztahu k funkci M_f. Konkrétně:

- A_f *roste* v bodě $x > 0$ právě tehdy, když $A_f(x) < M_f(x)$. Jinak řečeno, ve všech bodech definičního oboru, kde křivka mezní funkce je nad křivkou funkce průměrných veličin, funkce průměrných veličin roste. Toto plyne z (2.9) a z faktu, že funkce roste v daném bodě právě tehdy, když její první derivace je v tomto bodě kladná.
- A_f *klesá* v bodě $x > 0$ právě tehdy, když $A_f(x) > M_f(x)$. Jinak řečeno, ve všech bodech definičního oboru, kde křivka mezní funkce je pod křivkou funkce průměrných veličin, funkce průměrných veličin klesá.

Navíc z (2.9) získáme ještě jednu podstatnou informaci. Jde konkrétně o podmínku existence extrému funkce průměrných veličin v daném bodě. Jak víme, funkce má v bodě x extrém (nebo inflexní bod), jestliže je v daném bodě její první derivace rovna nule. Aby tedy A_f mohla mít v bodě x extrém, musí platit že $A'_f(x) = 0$. Vzhledem k tomu, že podle (2.9) platí $A'_f(x) = \frac{M_f(x)-A_f(x)}{x}$, je zřejmé, že $A'_f(x) = 0$ právě tehdy, když $M_f(x) - A_f(x) = 0$, jinak řečeno, když $M_f(x) = A_f(x)$. Graficky tedy nyní můžeme velice snadno nalézt extrémy funkce A_f – leží vždy v bodech, ve kterých se A_f protíná s M_f. Odvodili jsme tedy známé ekonomické pravidlo, že křivka M_f protíná křivku A_f v bodě jejího extrému.

Navíc nyní umíme nalézt body, v nichž má funkce průměrných nákladů své extrémy, aniž bychom tuto funkci konstruovali. Stačí nám znát pouze graf funkce celkových veličin. Jelikož $M_f(x)$ udává hodnotu směrnice tečny ke grafu funkce v bodě x a $A_f(x)$ udává směrnici paprsku, a jelikož hledáme body, pro které platí $M_f(x) = A_f(x)$, je zřejmé, že funkce průměrných veličin má svůj extrém v bodech, kde tečna ke grafu funkce celkových veličin T_f splývá s paprskem (jinak řečeno, paprsek je v těchto bodech zároveň tečnou ke grafu T_f). Tuto situaci ilustruje např. t_2 na obrázku 2.8.

2.6 Příklad použití T_f, A_f a M_f – životní cyklus výrobku

Ilustrujme si nyní smysl zavedení průměrných a mezních funkcí na příkladu životního cyklu výrobku. Obrázek 2.8 popisuje vývoj očekávaného prodeje (množství prodaných kusů) nějakého výrobku v čase. Pokusme se nyní, bez ekonomického výkladu a interpretací, identifikovat některé význačné body funkce T_f a pomocí nich vymezit očekávaná stádia/fáze životního cyklu výrobku. Z grafu snadno vyčteme, že:

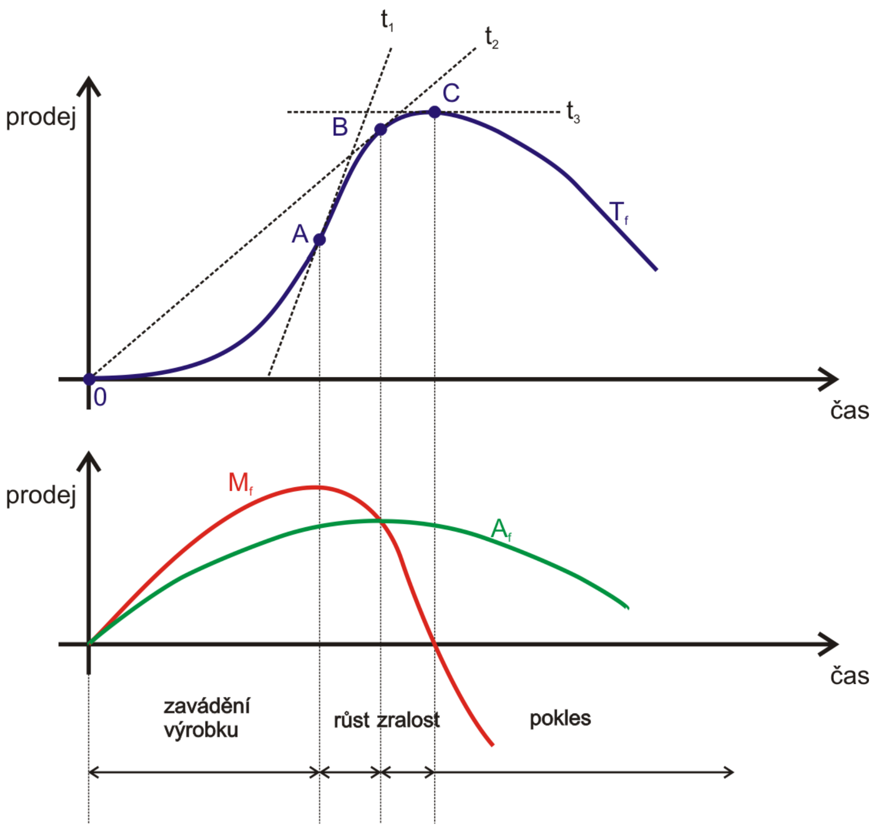
- Mezi body 0–A funkce T_f roste a roste také její první derivace (M_f), tedy funkce roste stále rychleji. Pro označení takovéhoto růstu můžeme používat pojmu progresivní růst. Bod A odpovídá inflexnímu bodu funkce T_f, takže se v něm mění tempo růstu této funkce (funkce T_f se v něm mění z konvexní na konkávní).
- Mezi body A–C funkce T_f stále ještě roste, nicméně nyní již klesajícím tempem (klesá M_f). Takovýto růst označujeme jako degresivní. Bod C odpovídá maximu funkce T_f.
- Od bodu C pak klesá jak funkce T_f, tak i její první derivace.

Podařilo se nám tím pádem identifikovat tři fáze životního cyklu výrobku, a to čistě na základě hodnot první a druhé derivace funkce T_f:

- progresivní růst prodeje,
- degresivní růst prodeje a
- pokles prodeje (v případě obrázku 2.8 jde o progresivní pokles).

Jak asi pozorným čtenářům neuniklo, na obrázku 2.8 jsou identifikovány čtyři fáze a nám se zatím podařilo identifikovat a pomocí první derivace a druhé derivace vymezit fáze tři. Otázkou tedy zůstává, čím je zvláštní bod B.

V bodě B splývá tečna ke grafu funkce T_f s paprskem. Jde tedy o bod, kdy nastává



Obrázek 2.8 Životní cyklus výrobku.

extrém funkce A_f (její maximum). Předchozí rozdělení můžeme s využitím funkcí A_f a M_f doplnit o rozlišení fází:

- A–B, která je charakterizována poklesem funkce M_f a růstem funkce A_f. S každou dodatečnou jednotkou času tedy prodej roste stále pomaleji (tj. nárůst prodeje s každou dodatečnou jednotkou času klesá), ale průměrný prodej na jednotku času zatím roste.
- B–C, kdy nejen že s každou dodatečnou jednotkou času roste T_f stále pomaleji, ale také průměrný prodej na jednotku času s rostoucím časem klesá.

Až s využitím průměrných a mezních funkcí se nám podařilo rozlišit fázi A–B a fázi B–C. Zdá se tedy, že má smysl s průměrnými a mezními funkcemi v ekonomické analýze pracovat. Tabulka 2.8 shrnuje dosavadní zjištění o charakteristikách jednotlivých fází životního cyklu výrobku. Tyto fáze můžeme nyní pojmenovat a charakterizovat následujícím způsobem:

Zavádění (fáze 0–A) – výrobek zavádíme na trh, jeho prodej zpočátku roste stále rychleji (konvexně). Konkávní „raketový“ start není ekonomicky příliš reálný.

Od bodu A však nárůst prodeje začíná zpomalovat.

Růst (fáze A–B) – prodej roste, byť stále pomaleji (klesá mezní prodej), ale v průměru na každou jednotku času prodej stále roste.

Zralost (fáze B–C) – ještě stále roste prodej, ale stále pomaleji a pomaleji. Navíc s rostoucím časem klesá i průměrný prodej na jednotku času. V této fázi už je nutné začít zvažovat inovace či zavedení jiného výrobku na trh. Bez zásahu povede stav nevyhnutelně do bodu C, kdy se nárůst celkového prodeje zastaví a postupně začne klesat.

Pokles/Stáří výrobku (fáze C a dále) – klesají všechny tři funkce, výrobek se stává nerentabilním.

Tabulka 2.1 Charakteristiky jednotlivých fází životního cyklu výrobku. Modře zvýrazněny jsou odlišnosti mezi fázemi A–B a B–C patrné pouze v matematicko-ekonomickém výkladu.

Fáze	**0–A**	**A–B**	**B–C**	**C a dále**
Matematický výklad	$f' > 0$ $f'' > 0$	$f' > 0$ $f'' < 0$	$f' > 0$ $f'' < 0$	$f' < 0$ $f'' < 0$
Matematicko-ekonomický výklad	T_f roste A_f roste M_f roste	T_f roste A_f roste M_f klesá	T_f roste A_f klesá M_f klesá	T_f klesá A_f klesá M_f klesá
Ekonomický výklad	zavádění	růst	zralost	pokles

Jak je patrné, má smysl v ekonomii pracovat kromě funkcí a jejich derivací také s funkcemi průměrných veličin.

Shrnutí

Ekonomie využívá funkce pro popis vztahů mezi proměnnými (mezi prvky ekonomického systému). Analýza funkcí často využívá jejich grafické reprezentace. Pro popis funkce bývají často používány jak bodové, tak i intervalové charakteristiky (např. mezní a průměrný sklon křivky). Funkce více proměnných jsou často analyzovány převedením na funkce jedné proměnné – průměty řezů, comparative statics. Pro popis průběhu funkce jsou v ekonomii využívány celkové, průměrné a mezní veličiny. Na základě hodnot celkových, průměrných a mezních veličin je pak možno určovat např. časové úseky, v nichž se ekonomický objekt chová určitým způsobem – viz fáze životního cyklu výrobku.

Otázky k zamyšlení

- Zamyslete se nad tím, jaké funkce v ekonomii používáme (poptávková, nabídková, produkční, funkce užitku, ...) a jaké jsou jejich závisle a nezávisle proměnné. Jaký typ vztahu (tj. jaká funkce) by byl vhodný pro jejich reprezentaci? Čím je dáno, která z proměnných je závisle proměnná a které jsou nezávisle proměnné?
- Jaké vlastnosti funkce si pamatujete ze střední školy? Které z nich umíte definovat a u kterých z nich umíte rozhodnout, jestli je daná funkce má, nebo ne? Které vlastnosti funkce (monotonie, konvexita, spojitost, hladkost, ...) potřebujeme k dostačujícímu popisu průběhu funkce? Které z těchto vlastností popisují chování funkce v bodě a které popisují její chování na intervalu (tedy v nějakém úseku osy x)?
- Ze střední školy si všichni pamatujeme funkce jedné proměnné v obecném tvaru $y = f(x)$. Umíte uvést nějaký příklad funkcí jedné proměnné využívaných běžně v ekonomii?
- S jakými funkcemi více proměnných (tj. funkcemi v obecném tvaru $y = f(x_1, \dots, x_n)$) jste se už setkali? Které z nich hrají důležitou roli v eknomii, které v teorii spotřebitele, které v teorii výrobce, které na makro a které na mikro úrovni?
- Se kterými funkcemi celkových, průměrných a mezních veličin jste se už v běžném životě nebo na přednáškách setkali? Jaký je jejich význam pro ekonomické rozhodování?

Další zdroje informací

Baldani, J., Bradfield, J., Turner, R. W. (2005) *Mathematical economics*. Thomson South-Western, 2. vydání. ISBN 0324183321.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie I*. VŠB-TU, Ostrava.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie II*. VŠB-TU, Ostrava.

Hands, D. W. (2004) *Introductory mathematical economics*. Oxford University Press, 2. vydání. ISBN 0195133781.

Soper, J. (2004) *Mathematics for economics and business: an interactive introduction.* Wiley-Blackwell, 2. vydání. ISBN 1405111275.

Kapitola 3
Elasticita funkce

Cíle
Prostudování této kapitoly umožní čtenáři:

- pochopit význam pojmu elasticita funkce a jeho rozdíl oproti sklonu funkce,
- porozumět významu elasticity funkce při ekonomických analýzách,
- být schopen určit elasticitu funkce v bodě i na intervalu, a to jak numericky, tak i graficky,
- vyvozovat závěry na základě elasticity funkce v ekonomickém kontextu – např. otázka výhodnosti zvyšování ceny statků výrobci na základě cenové elasticity poptávky.

3.1 Úvod

V předchozí kapitole jsme si popsali veličiny, které charakterizují sklon funkce na intervalu nebo v konkrétním bodě. Pomocí nich popisujeme rychlost změny hodnot závisle proměnné v závislosti na změnách nezávisle proměnné. V ekonomii má smysl uvažovat (z důvodů, které snad budou po přečtení této kapitoly zjevné) také podobnou charakteristiku funkce, která však nepopisuje absolutní nárůst funkční hodnoty, ale nárůst relativní. Touto veličinou je právě elasticita funkce.

3.2 Význam elasticity funkce

Při vymezení elasticity funkce je nutné, abychom si byli vědomi, která z proměnných je závislá a která nezávislá. Tomuto vymezení jsme se věnovali už v první kapitole. Uvažujme nyní pro jednoduchost funkci jedné proměnné v obecném tvaru $y = f(x)$, kde y je závisle proměnná a x je nezávisle proměnná.

Připomeňme si, co již známe ze základního kurzu matematiky. **Sklon diferencovatelné funkce v bodě** je popsán její první derivací a udává, jaký nárůst funkční hodnoty je vyvolán nekonečně malým přírůstkem nezávisle proměnné. Např. lineární funkce, která popisuje vztah „přímé úměrnosti“ mezi vstupem (nezávisle proměnnou) a výstupem (závisle proměnnou), má tedy v každém bodě sklon stejný.

Elasticita (= pružnost) funkce (ozn. E) popisuje relativní změnu závisle proměnné vzhledem k relativní změně nezávisle proměnné. Často se s elasticitou v ekonomické terminologii setkáváme ve spojitosti s poptávkovou nebo nabídkovou funkcí. Ekonomie operuje např. s pojmy cenová elasticita poptávky, cenová elasticita nabídky, důchodová elasticita poptávky, elasticita investic, elasticita substituce, ... Je nutné zdůraznit, že **elasticita funkce $\neq$ sklon funkce**.

Elasticita funkce f v bodě x popisuje proporcionalitu změn závisle a nezávisle proměnné. Můžeme ji symbolicky definovat jako:

$$E_f(x) = \frac{\text{\% změna závisle proměnné } f(x)}{\text{\% změna nezávisle proměnné } x}. \tag{3.1}$$

Je zřejmé, že jde o bezrozměrnou veličinu, jejíž hodnoty mohou pro nenulovou změnu nezávisle proměnné nabývat libovolných hodnot, jinak řečeno $E_f(x) \in \mathbb{R}$. Z praktických důvodů má smysl rozlišovat následující stavy:

- funkce je **elastická v bodě** x, právě tehdy, když $|E_f(x)| > 1$,
- funkce je **neelastická v bodě** x, právě tehdy, když $|E_f(x)| < 1$,
- funkce je **jednotkově elastická v bodě** x, právě tehdy, když $|E_f(x)| = 1$.

V ekonomii jsou používány 2 přístupy k elasticitě. Někteří ekonomové uvažují elasticitu funkce vždy kladnou a souhlasnost nebo nesouhlasnost změny odvozují z kontextu úlohy (souhlasná změna znamená, že nárůst nezávisle proměnné vyvolá nárůst závisle proměnné nebo pokles vyvolá pokles; nesouhlasná změna znamená, že nárůst vyvolá pokles nebo pokles vyvolá nárůst).

Druhým přístupem, kterého se budeme držet i my, je uvažovat elasticitu jako libovolné reálné číslo. Kladné znaménko elasticity, tj. situace, kdy $E_f(x) > 0$, pak bude reprezentovat *souhlasnou změnu* (tj. relativní nárůst hodnoty $f(x)$ vyvolaný relativním nárůstem hodnoty x, resp. relativní pokles hodnoty $f(x)$ vyvolaný relativním poklesem hodnoty x). Záporné znaménko elasticity, tj. situace, kdy $E_f(x) < 0$ reprezentuje *nesouhlasnou změnu* (tj. relativní nárůst hodnoty $f(x)$ vyvolaný relativním poklesem hodnoty x, resp. relativní pokles hodnoty $f(x)$ vyvolaný relativním nárůstem hodnoty x).

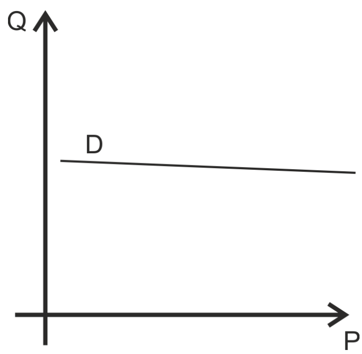
Pojďme se nyní zaměřit na konkrétní příklad z ekonomické praxe, abychom mohli lépe pochopit smysl a účel zavedení elasticity. Podíváme se blíže na cenovou elasticitu poptávky. Budeme uvažovat klasicky skloněnou poptávkovou křivku (tj. křivku $D: \ Q = f_D(P)$, která je klesající). Poptávková křivka popisuje množství statku, které jsou spotřebitelé při dané ceně ochotni koupit. Tím pádem předpokládáme, že cenová elasticita poptávky bude pro každou cenu P záporná, jelikož nárůst ceny vždy vyvolá pokles poptávaného množství. Pokud bychom definovali cenovou elasticitu poptávky E_{DP} ve smyslu (3.1), pak dostáváme:

$$E_{DP} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}}. \tag{3.2}$$

Zamysleme se nyní, jaké faktory ovlivňují cenovou elasticitu poptávky (E_{DP}). Ne všechny možné vlivy jsou vypozorovatelné přímo ze vztahu (3.2). Některé vlivy jsou skryty přímo v samotné poptávkové funkci (jejím tvaru) a dokonce i v kontextu, pro nějž je odvozena. Co tedy ovlivňuje, o kolik procent poklesne poptávka po daném statku, jestliže zvýšíme cenu o k%? Mezi možné vlivy patří:

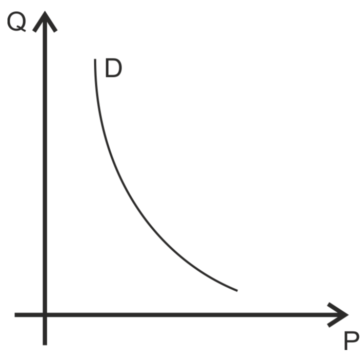
Druh poptávaného zboží/statku Spotřebitelé reagují různě na změnu ceny různých typů statků.

- u *nezbytných statků* (tj. statků, jejichž spotřebu není možné výrazně omezit – např. sůl, voda atd.) reaguje poptávka na navýšení ceny jen malým snížením poptávaného množství.



Obrázek 3.1 Graf poptávkové křivky (D; demand) pro *nezbytný statek* (např. sůl). Poptávka je vysoce neelastická.

- u *luxusních statků* je oproti tomu poptávka vysoce elastická – i malé zvýšení ceny může vyvolat výrazný (nadproporciální) pokles poptávaného množství (zvláště pokud ke zdraženým statkům existují substituty).



Obrázek 3.2 Graf poptávkové křivky (D; demand) pro *luxusní statek*. Poptávka je vysoce elastická.

Počáteční cena zboží/statku Spotřebitelé reagují různě také v závislosti na tom, za jakou cenu se zboží prodávalo před změnou ceny (např. v závislosti, na tom, je-li vzhledem k „obvyklým cenám“ spíše vysoká nebo nízká).

- *snížení neúměrně vysoké ceny* nevyvolá velkou změnu poptávaného množství,
- *stejné snížení nízké ceny* (nízké vzhledem k převládajícím poměrům) může vyvolat značně vysoký nárůst poptávky.

Mohlo by se zdát, že oba tyto případy můžeme dosti výstižně popsat pomocí derivace (tj. pomocí sklonu funkce v daném bodě). Proč potom uvažovat relativní změny a tedy elasticitu funkce? Podívejme se na poptávkovou funkci nyní očima výrobců. Předpokládejme, že výrobci jsou schopni ovlivnit cenu jimi nabízeného výrobku. Předpokládejme také, že se snaží maximalizovat svůj příjem z prodeje výrobků, tj. že výrobci maximalizují výraz $P \cdot Q = P \cdot f_D(P)$. Předpokládáme klesající poptávkovou křivku (tedy takovou f_D, pro kterou je cenová elasticita $E_{DP} < 0$ v každém jejím bodě). Vyplatí se výrobcům zvyšovat nebo snižovat cenu? Za jakých podmínek se jim to vyplatí? Při hledání odpovědí na tyto otázky bychom si s derivacemi a sklonem funkce nemuseli vystačit. Jaké informace navíc přináší elasticita? Uvažujme nyní příklad 1% změny ceny poptávaného statku.

Tam, kde je poptávka elastická, vyvolá 1% změna ceny (z P na $\overline{P} = 1 \pm 0,01 \cdot P$) k% změnu poptávaného množství (z Q na $\overline{Q} = (1 \pm \frac{k}{100})Q$), přičemž $|k| > 1$. V případě cenové elasticity poptávky pak vlivem klesající poptávkové funkce můžeme očekávat, že $k = E_{DP} < -1$, jelikož nárůst ceny musí vyvolat pokles poptávaného množství (neuvažujeme-li Giffenův paradox). Jak se bude vyvíjet příjem?

- Jestliže **cena klesne o 1 %**, pak se příjem z prodeje změní následujícím způsobem:

$$P \cdot Q \;\rightarrow\; (1 - 0,01) \cdot P \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right) \cdot Q = 0,99 \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right) \cdot P \cdot Q \qquad (3.3)$$

  Původní příjem výrobců $P \cdot Q$ se změní na $\overline{P} \cdot \overline{Q} = 0.99 \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right) \cdot P \cdot Q$. K nárůstu celkového příjmu vlivem snížení ceny o 1 % tedy dojde, jestliže

$$0,99 \cdot \left(1 - \frac{k}{100}\right) > 1$$

$$0,99 - \frac{0,99 \cdot k}{100} > 1$$

$$99 - 0,99 \cdot k > 100$$

$$-0,99 \cdot k > 1$$

$$k < -\frac{1}{0,99} \doteq -1,010101 \qquad (3.4)$$

Jak je z (3.4) patrné, za daných podmínek dojde k navýšení celkového příjmu vždy, když $k = E_{DP} < -1,010101$. Přitom předpokládáme, že poptávka je elastická, tj. že $k = E_{DP} < -1$. Při elastické poptávce (už od hodnoty elasticity cca $-1,02$) tedy obecně můžeme očekávat, že snížení ceny o 1 % vyústí ve větší celkový příjem.
Zjednodušeně bychom mohli říci, že snížení ceny v elastické oblasti poptávkové křivky se výrobcům vyplatí, neboť stoupne jejich příjem.

- Jestliže v této situaci **cena vzroste o 1 %**, pak se příjem z prodeje změní následujícím způsobem:

$$P \cdot Q \;\rightarrow\; (1+0,01)\cdot P \cdot \left(1+\frac{k}{100}\right)\cdot Q = 1,01 \cdot \left(1+\frac{k}{100}\right)\cdot P \cdot Q \qquad (3.5)$$

Původní příjem výrobců $P \cdot Q$ se změní na $\overline{P}\cdot\overline{Q} = 1,01 \cdot \left(1+\frac{k}{100}\right)\cdot P \cdot Q$. K nárůstu celkového příjmu vlivem nárůstu ceny o 1 % tedy dojde, jestliže

$$1,01 \cdot \left(1+\frac{k}{100}\right) > 1$$

$$1,01 + \frac{1,01\cdot k}{100} > 1$$

$$101 + 1,01 \cdot k > 100$$

$$1,01 \cdot k > -1$$

$$k > -\frac{1}{1,01} \doteq -0,990099 \qquad (3.6)$$

Jak je z (3.6) patrné, za daných podmínek dojde k navýšení celkového příjmu vždy, když $k = E_{DP} > -0.990099$. Přitom předpokládáme, že poptávka je elastická, tj. že $k = E_{DP} < -1$. Při elastické poptávce tedy nemůže nastat, že by zvýšení ceny o 1% vyústilo ve větší celkový příjem. *Výrobcům se v elastické části poptávkové funkce nevyplatí zvyšovat cenu, neboť zvýšení ceny nepovede ke zvýšení jejich příjmu.* Je to důsledkem toho, že v elastické části poptávkové křivky je relativní pokles poptávaného množství větší, než relativní nárůst ceny.

V intervalech cen, pro něž je poptávka neelastická, tj. $-1 < k = E_{DP} < 0$, bychom obdobnými úvahami mohli odvodit, že se výrobcům vyplatí zvyšovat cenu (jejich příjem v takovémto případě poroste). Při snížení ceny v tomto pásmu poklesne celkový příjem výrobců a takovýto krok je proto iracionální. Konkrétněji (všimněte si, že výpočet probíhá naprosto totožně jako snižování ceny u elastické poptávky, liší se nyní jen v předpokladu, že $-1 < k < 0$):

- Jestliže **cena klesne o 1 %**, pak se příjem z prodeje změní následujícím způsobem:

$$P \cdot Q \;\rightarrow\; (1-0.01)\cdot P\cdot\left(1-\frac{k}{100}\right)\cdot Q = 0,99\cdot\left(1-\frac{k}{100}\right)\cdot P\cdot Q \qquad (3.7)$$

Původní příjem výrobců $P \cdot Q$ se změní na $\overline{P}\cdot\overline{Q} = 0.99\cdot\left(1-\frac{k}{100}\right)\cdot P\cdot Q$. K nárůstu celkového příjmu vlivem snížení ceny o 1 % tedy dojde, jestliže

$$0,99\cdot\left(1-\frac{k}{100}\right) > 1$$

$$0,99 - \frac{0,99\cdot k}{100} > 1$$

$$99 - 0,99\cdot k > 100$$

$$-0,99\cdot k > 1$$

$$k < -\frac{1}{0,99} \doteq -1,010101 \qquad (3.8)$$

Jak je z (3.8) patrné, za daných podmínek dojde k navýšení celkového příjmu vždy, když $k = E_{DP} < -1,010101$. Přitom předpokládáme, že poptávka je v tomto případě nelastická, tj. že $k = E_{DP} > -1$. Při neelastické poptávce tedy obecně nemůžeme očekávat, že by snížení ceny o 1 % vyústilo ve větší celkový příjem.
Snižování ceny při neelastické poptávce tedy není racionální krok z pohledu výrobce (nabídky), jelikož nevyústí v nárůst celkového příjmu.

- Jestliže při neelastické poptávce **cena vzroste o 1 %**, pak se příjem z prodeje změní následujícím způsobem (opět výpočet totožný se situací nárůstu ceny při elastické poptávce):

$$P \cdot Q \;\rightarrow\; (1+0,01)\cdot P\cdot\left(1+\frac{k}{100}\right)\cdot Q = 1,01\cdot\left(1+\frac{k}{100}\right)\cdot P\cdot Q \qquad (3.9)$$

Původní příjem výrobců $P \cdot Q$ se změní na $\overline{P}\cdot\overline{Q} = 1,01\cdot\left(1+\frac{k}{100}\right)\cdot P\cdot Q$. K nárůstu celkového příjmu vlivem nárůstu ceny o 1 % tedy dojde, jestliže

$$1,01\cdot\left(1+\frac{k}{100}\right) > 1$$

$$1,01 + \frac{1,01\cdot k}{100} > 1$$

$$101 + 1,01\cdot k > 100$$

$$1,01\cdot k > -1$$

$$k > -\frac{1}{1,01} \doteq -0,990099 \qquad (3.10)$$

Jak je z (3.10) patrné, za daných podmínek dojde k navýšení celkového příjmu vždy, když $k = E_{DP} > -0.990099$. Přitom vzhledem k tomu, že poptávka je

neelastická, víme, že $k = E_{DP} > -1$. Při neelastické poptávce tedy vlivem navýšení ceny o 1 % může dojít k nárůstu celkového příjmu, a to pro všechny hodnoty elasticity k takové, že $k \in (-0.990099; 0)$.
Výrobcům se v neelastické části poptávkové funkce obecně vyplatí zvyšovat cenu, neboť zvýšení ceny vede ke zvýšení jejich příjmu. Je to důsledkem toho, že v neelastické části poptávkové křivky je relativní pokles poptávaného množství menší, než relativní nárůst ceny.

V intervalech jednotkově elastické poptávky, tj. pro $k = E_{DP} = -1$, se výrobcům nevyplatí cenu měnit vůbec. Jak nárůst, tak i pokles ceny totiž vede k (sotva znatelnému) snížení příjmu. Konkrétně:

- Při **poklesu ceny o 1%** dostáváme:

$$P \cdot Q \;\rightarrow\; (1 - 0,01) \cdot P \cdot \left(1 - \frac{-1}{100}\right) \cdot Q = 0,99 \cdot (1,01) \cdot P \cdot Q \tag{3.11}$$

a tedy

$$\overline{P} \cdot \overline{Q} = 0,99 \cdot 1,01 \cdot P \cdot Q = 0,9999 \cdot P \cdot Q,$$

jinak řečeno

$$\overline{P} \cdot \overline{Q} < P \cdot Q. \tag{3.12}$$

Z (3.12) jasně vyplývá, že snížením ceny o 1 % dojde k mírnému poklesu celkového příjmu, jestliže je funkce poptávky jednotkově elastická.
Při jednotkově elastické poptávce tedy nemá smysl snižovat cenu.

- Při **nárůstu ceny o 1 %** dostáváme:

$$P \cdot Q \;\rightarrow\; (1 + 0,01) \cdot P \cdot \left(1 + \frac{-1}{100}\right) \cdot Q = 1,01 \cdot (0,99) \cdot P \cdot Q \tag{3.13}$$

a tedy

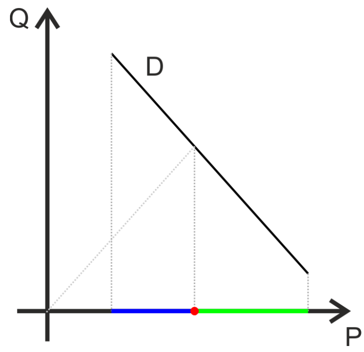
$$\overline{P} \cdot \overline{Q} = 1,01 \cdot 0,99 \cdot P \cdot Q = 0,9999 \cdot P \cdot Q,$$

jinak řečeno opět dostáváme

$$\overline{P} \cdot \overline{Q} < P \cdot Q. \tag{3.14}$$

Z (3.14) opět jasně vyplývá, že zvýšením ceny o 1 % dojde k mírnému poklesu celkového příjmu, jestliže je funkce poptávky jednotkově elastická.
Při jednotkově elastické poptávce tedy nemá smysl ani zvyšovat cenu.

Je dobré si uvědomit, že pokud uvažujeme lineární poptávkovou funkci (klesající), pak její sklon je ve všech místech konstantní, nicméně v některých jejích částech se může výrobcům vyplatit zvyšovat cenu (tam, kde je poptávková křivka neelastická) a v některých jejích částech se jim vyplatí cenu snižovat (v elastické části poptávkové křivky) – v obou těchto případech dosáhnou zvýšení příjmu. Existují tedy funkce s konstantním sklonem, jejichž některé části jsou elastické a některé neelastické.



Obrázek 3.3 Graf lineární poptávkové křivky $D: Q = f(P)$. Funkce je neelastická pro modře označené hodnoty P, elastická pro zeleně označené hodnoty P a jednotkově elastická pro červeně označenou hodnotu P. Sklon poptávkové funkce je pro všechny hodnoty P stejný.

3.3 Výpočet elasticity funkce

Začněme nejprve od změn nezávisle proměnné, které nejsou nekonečně malé. Takovýmto změnám odpovídá změna závisle proměnné popsaná tzv. *obloukovou elasticitou*:

$$E_f = \frac{\frac{\Delta f(x)}{f(x)}}{\frac{\Delta x}{x}} = \frac{\frac{f(x_2)-f(x_1)}{\frac{f(x_2)+f(x_1)}{2}}}{\frac{x_2-x_1}{\frac{x_2+x_1}{2}}}. \tag{3.15}$$

Tímto způsobem tedy definujeme *elasticitu funkce na intervalu*. V případě cenové elasticity poptávky uvažované výše bychom měli:

$$E_{DP} = \frac{\frac{\Delta Q}{Q}}{\frac{\Delta P}{P}} = \frac{\frac{Q_2-Q_1}{\frac{Q_2+Q_1}{2}}}{\frac{P_2-P_1}{\frac{P_2+P_1}{2}}}. \tag{3.16}$$

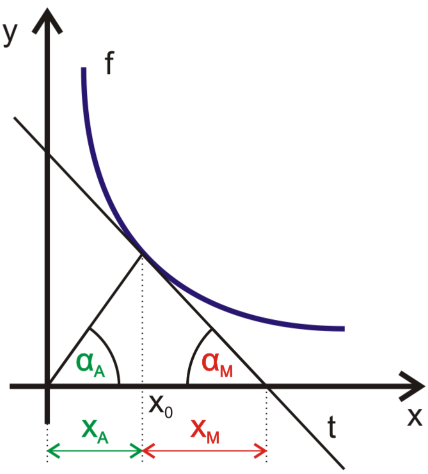
Chceme-li definovat elasticitu funkce v bodě, musíme přejít k infinitesimálním (nekonečně malým) změnám. S využitím diferenciálního počtu tak dostáváme vztah pro *elasticitu funkce v bodě* v následující podobě:

$$E_f(x) = \frac{\frac{df(x)}{f(x)}}{\frac{dx}{x}} = \frac{df(x)}{f(x)} \cdot \frac{x}{dx} = \frac{df(x)}{dx} \cdot \frac{x}{f(x)}. \tag{3.17}$$

Tím máme zavedeny potřebné vzorce pro výpočet obloukové elatsicity (3.15) a elasticity funkce v daném bodě (3.17). S využitím vztahů pro výpočet funkcí průměrných a mezních veličin (2.4) a (2.5) můžeme vztahy (3.15) a (3.17) přepsat do následující podoby:

$$E_f = \frac{M_f}{A_f}. \tag{3.18}$$

To nám mimo jiné umožní identifikovat intervaly, v nichž je funkce elastická a neelastická přímo z jejího grafu, neboť jak A_f, tak i M_f mají jasnou grafickou interpretaci (viz obrázek 3.4). Ze vztahu (3.18) a ze skutečnosti, že $M_f(x_0) = \mathrm{tg}(\alpha_M)$



Obrázek 3.4 Grafické určení elasticity funkce $f: y = f(x)$ v bodě x_0 s využitím směrového úhlu paprsku (α_A) a směrového úhlu tečny (α_M) ke grafu funkce f.

a $A_f(x_0) = \mathrm{tg}(\alpha_A)$ pak vyplývají následující pravidla, na jejichž základě můžeme rozpoznat přímo z grafu funkce, jestli je v daném bodě elastická, neelastická nebo jednotkově elastická (viz obrázek 3.4):

$$M_f > A_f \;\Leftrightarrow\; \mathrm{tg}(\alpha_M) > \mathrm{tg}(\alpha_A) \;\Leftrightarrow\; \alpha_M > \alpha_A \;\Leftrightarrow\; |E_f(x_0)| > 1, \tag{3.19}$$

$$M_f < A_f \;\Leftrightarrow\; \mathrm{tg}(\alpha_M) < \mathrm{tg}(\alpha_A) \;\Leftrightarrow\; \alpha_M < \alpha_A \;\Leftrightarrow\; |E_f(x_0)| < 1, \tag{3.20}$$

$$M_f = A_f \;\Leftrightarrow\; \mathrm{tg}(\alpha_M) = \mathrm{tg}(\alpha_A) \;\Leftrightarrow\; \alpha_M = \alpha_A \;\Leftrightarrow\; |E_f(x_0)| = 1. \tag{3.21}$$

Ze vztahu (3.17) také vyplývá možnost vyjádření elasticity funkce ve tvaru:

$$E_f = \frac{f'(x)}{f(x)} \cdot x = x \cdot [\ln(f(x))]', \tag{3.22}$$

který využívá skutečnosti, že $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + c$. Vztah (3.22) může v některých případech výrazně zjednodušit výpočet elasticity funkce, proto je dobré o jeho existenci vědět.

Shrnutí

Elasticita funkce popisuje relativní změnu závisle proměnné vzhledem k relativní změně nezávisle proměnné, a tudíž nese jinou informaci než sklon funkce. Graficky odpovídá elasticita funkce v bodě podílu tangenty směrového úhlu tečny k funkci v daném bodě a tangenty směrového úhlu paprsku v tomto bodě. Elasticitu je možné uvažovat buď jako nezápornou veličinu (souhlasnost a nesouhlasnost změny je pak nutné odvozovat z kontextu) nebo jako v tomto textu jako veličinu nabývající libovolné reálné hodnoty, kde znaménko indikuje souhlasnost nebo nesouhlasnost změny. Cenová elasticita poptávky nese informaci o relativní změně poptávaného množství statku vyvolané relativní změnou ceny a dá se z ní tedy z pohledu výrobce odvodit, jestli zvýšení nebo snížení ceny statku bude znamenat nárůst příjmů výrobce.

Otázky k zamyšlení

- Co je základní myšlenkou elasticity a jakou vlastnost funkce popisuje?
- Umíte na konkrétním příkladu (důchodová elasticita poptávky, cenová elasticita produkce, ...) vysvětlit, co znamená, že funkce je elastická, neelastická, nebo že má jednotkovou elasticitu?
- Jaký je rozdíl mezi elasticitou funkce v daném bodě a jejím sklonem ve stejném bodě? Umíte jej vysvětlit tak, aby jej pochopil i neekonom?
- Napadá vás nějaký důvod, proč elasticitu jako vlastnost funkce využívá významně právě ekonomie? Jakou zásadní informaci elasticita funkce obsahuje?
- Jak by vypadala funkce s konstantní elasticitou, tj. funkce, která by měla v každém svém bodě stejnou hodnotu elasticity? Co by to znamenalo pro průběh (tvar) funkce a jaký by byl ekonomický význam takovéto funkce (kdyby šlo např. o funkci nabídky)? Jak souvisí elasticita s ostatními ekonomickými pojmy? Můžeme např. očekávat, že poptávková funkce po určitém typu statků bude elastická, neelastická, jednotkově elastická (a proč)?

Další zdroje informací

Baldani, J., Bradfield, J., Turner, R. W. (2005) *Mathematical economics*. Thomson South-Western, 2. vydání. ISBN 0324183321.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie I*. VŠB-TU, Ostrava.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie II*. VŠB-TU, Ostrava.

Hands, D. W. (2004) *Introductory mathematical economics*. Oxford University Press, 2. vydání. ISBN 0195133781.

Soper, J. (2004) *Mathematics for economics and business: an interactive introduction.* Wiley-Blackwell, 2. vydání. ISBN 1405111275.

Kapitola 4
Modelování oscilací v ekonomii – pavučinové modely

Cíle
Prostudování této kapitoly umožní čtenáři:

- pochopit proces formování rovnováhy na trhu, na němž existuje zpoždění,
- porozumět tomu, jakou roli hrají různé druhy zpoždění (zpoždění na straně nabídky/poptávky) při formování rovnováhy,
- být schopen rozhodnout, jestli je při existenci zpoždění na straně nabídky nebo poptávky na trhu dosažitelný rovnovážný stav, a stanovit podmínky nutné pro jeho dosažení (v tomto textu za předpokladu lineárních křivek nabídky a poptávky),
- popsat proces formování rovnováhy na trhu matematickými prostředky (diferenčními rovnicemi v případě diskrétních modelů a diferenciálními rovnicemi v případě modelů spojitých).

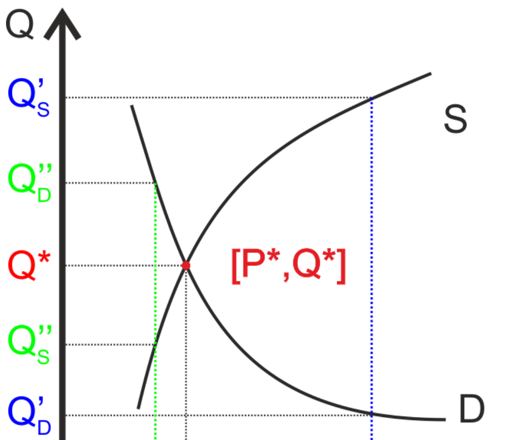
4.1 Úvod

Doposud jsme ekonomickou realitu popisovali s využitím statických funkcí a veličin, tj. takových, které nebyly závislé na čase a jejichž hodnota se v čase neměnila. Když bychom tuto ideu přenesli do tržních modelů, předpokládali bychom, že např. poptávka i nabídka reagují na změnu ceny okamžitě, nebo že při změně některé z určujících veličin se tržní rovnováha obnoví ihned. To je však na první pohled obrovské zjednodušení. Jestliže předpokládáme, že čas nehraje v modelovaném systému důležitou roli (tj. mimo jiné předpokládáme, že neexistuje zpoždění), můžeme být velice daleko od reality. V této kapitole si odvodíme několik modelů pro nalezení dynamické rovnováhy na trhu, na němž existuje zpoždění. Začneme krátkým připomenutím toho, jak se hledá statická rovnováha (tj. rovnováha na trhu bez existence zpoždění), a situaci dále zobecníme zavedením různě velkého zpoždění na stranu nabídky nebo poptávky. Ve statickém případě rovnováha existuje vždy, pokud se křivky nabídky a poptávky protínají (pak právě jejich průsečík je rovnovážným bodem). Při existenci zpoždění nás bude zajímat, např. jak rychle a jestli vůbec je rovnováha na trhu dosažitelná.

Pro jednoduchost se v této kapitole zaměříme na hledání rovnováhy na trhu zboží. Postupy popsané dále však jsou aplikovatelné na libovolný jiný trh, na němž je myslitelná existence zpoždění.

4.2 Statická rovnováha na trhu

Aby byla jasná souvislost se statickými modely, připomeneme si nejdříve postup hledání statické rovnováhy na trhu jednoho výrobku/statku (obecné schéma nabídkové a poptávkové funkce a teoretického rovnovážného bodu $[P^*, Q^*]$ je na Obrázku 4.1). Statické rovnováhy je dosaženo na trhu bez existence zpoždění právě tehdy, když při dané ceně je totožné nabízené a poptávané zboží. *Rovnovážný bod* (statická rovnováha) je tedy charakterizován jak rovnovážnou cenou P^*, tak i rovnovážným množstvím statku na trhu Q^*.



Obrázek 4.1 Graf poptávky (D) a nabídky (S) na daném trhu. Při množství Q^* a ceně P^* je trh v rovnováze (červená). Při ceně P' je na trhu převis nabídky, tj. $Q'_S > Q'_D$ (modrá). Při ceně P'' je na trhu převis poptávky, tj. $Q''_D > Q''_S$ (zelená).

V situaci, kdy je na trhu nabízeno množství Q^* za jednotkovou cenu P^*, pokrývá nabídka přesně poptávku, neexistuje tlak na změnu nabízeného množství a trh je tedy v *rovnováze* (červená varianta na obrázku 4.1). V případě, že je cena příliš vysoká (uvažujeme stále běžný žádoucí statek), např. P' na obrázku 4.1, výrobci jsou při ní ochotni vyrábět mnoho, nicméně spotřebitelé nejsou ochotni tolik nakoupit. Proto je nabízené množství vyšší než poptávané a na trhu existuje *převis nabídky*, tj. $Q'_S > Q'_D$ (situace je znázorněna modře na obrázku 4.1). Tato situace přirozeně znamená, že výrobci nebudou schopni prodat celou svou produkci. Řešením je buď snížení ceny, nebo např. převedení nadbytečné produkce do zásob a jejich prodej později (což je ale možné jen u některého typu statků). Alternativně je možné snažit se působit na poptávku tak, aby se posunula celá poptávková křivka, to je však reálné spíše v delším časovém horizontu.

Možný je také *převis poptávky*, tedy situace, kdy vlivem nízké ceny jsou kupující ochotni poptávat více, než kolik při této ceně jsou výrobci ochotni nabízet (situace znázorněna zeleně na obrázku 4.1. Okamžitým řešením pro dosažení rovnováhy by bylo buď doplnění nabízeného množství např. ze zásob (což ale nebudou patrně výrobci ochotni udělat, navíc zásoby nemusí existovat), nebo nárůst ceny takový, aby se při výsledné ceně poptávané množství rovnalo množství nabízenému. Uvědomme si také, že všechna navrhovaná řešení rovnováhy (s výjimkou ovlivnění poptávky) jsou v grafu reprezentována ,,pohybem po křivce".

Formálně probíhá hledání statické tržní rovnováhy v ekonomických modelech následujícím způsobem. Uvažujeme-li obecnou funkci nabídky:

$$S: \; Q = f_S(P) \tag{4.1}$$

a poptávky:

$$D: \; Q = f_D(P), \tag{4.2}$$

pak statické tržní rovnováhy je dosaženo právě tehdy, když se poptávané množství rovná množství nabízenému, tj. když:

$$f_S(P) = f_D(P). \tag{4.3}$$

Cena P^*, která je řešením rovnice (4.3), je pak *rovnovážnou cenou* a jí odpovídající nabízené množství $Q^* = f_S(P^*) = f_D(P^*)$ je *rovnovážným množstvím*. Dvojice $[P^*, Q^*]$ pak popisuje *rovnovážný stav* na trhu. Jen pro připomenutí, takto je možné uvažovat jen tehdy, pokud poptávka i nabídka reagují na změnu ceny okamžitě, tj. bez zpoždění. Tak tomu ale obecně být nemusí. Zavedeme si proto model, který bude schopný zohlednit existenci zpoždění na některé ze stran – tj. na straně nabídky, nebo poptávky.

4.3 Dynamické tržní modely a zpoždění

Přecházíme-li k modelování zpoždění v ekonomice, pak od zavedených funkcí S a D (viz (4.1) a (4.2)) přecházíme k následujícím funkcím, které jsou jejich přímým zobecněním, nevyžadujícím nezbytně schopnost nabídky a poptávky reagovat na změnu ceny okamžitě:

$$S: \; Q(t) = f_S(P(t)), \tag{4.4}$$

$$D: \; Q(t) = f_D(P(t)). \tag{4.5}$$

Uvažujeme tedy cenu jako funkci času a tudíž i D i S jako funkce času. Pro zjednodušení zápisu budeme pro funkce proměnné t používat jednodušší značení, např.

$P(t) = P_t$. Co se proměnné t týká, obecně můžeme uvažovat dvě základní kategorie dynamických modelů:

Diskrétní Čas v těchto modelech neběží po nekonečně malých okamžicích, ale po úsecích konečné (ale nenulové) délky – často systém popisujeme po hodinách, dnech, týdnech, nebo letech. Modely s diskrétním časem jsou popisovány diferenčními rovnicemi. V rámci těchto modelů můžeme uvažovat zpoždění na kterékoliv ze stran:

- **Diskrétní modely se zpožděním na straně nabídky** – V ekonomii jsou nejčastěji diskutovány jako příklad příčiny oscilací na trhu. Tyto modely předpokládají, že má-li nabídka reagovat na změnu ceny na trhu změnou objemu zboží (zejména navýšením nabízeného množství zboží), obnáší to výrobu tohoto zboží, a tudíž nutně i časové zpoždění. Časové zpoždění reakce je pak zapříčiněno právě nutností „dovyrobit“ chybějící objem produkce s tím, že výroba nějakou dobu trvá. Typickým příkladem, kde výroba může mít značné zpoždění, je zemědělství – při neexistenci zásob je třeba plodiny znovu vypěstovat. V tomto případě v modelu vystupuje poptávka v podobě (4.5) a nabídka je zpožděná (uvažujme pro jednoduchost zpoždění o jediné časové období – tedy nabídka v čase t nemůže reagovat na cenu P_t v tomtéž čase, ale je nutně reakcí na cenu P_{t-1} z předchozího období):

$$S: \; Q(t) = f_S(P_{t-1}). \tag{4.6}$$

- **Diskrétní modely se zpožděním na straně poptávky** – U těchto modelů předpokládáme, že nabídka je na změnu ceny schopná reagovat okamžitě a je ji tedy možné v čase t popsat obecně funkcí (4.4), nicméně poptávka okamžité reakce schopna není. Může jít např. o trhy statků, které jsou velice drahé a u jejichž nárůstu ceny spotřebitelé musí „dospořit“ finanční prostředky, než budou nákup schopni realizovat – jinak řečeno, podle současné ceny určí, kolik je potřeba naspořit peněz, a jakmile je shromáždí (což nějakou dobu trvá), realizují nákup. Poptávkovou funkci tedy můžeme charakterizovat v tomto případě jako funkci obsahující zpoždění:

$$D: \; Q(t) = f_D(P_{t-1}). \tag{4.7}$$

Řešením diskrétního modelu je pak posloupnost $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$, která popisuje vývoj ceny daného produktu na trhu v čase. Zajímat nás bude, jestli existuje konečná limita této posloupnosti. Pokud ano, pak existuje rovnovážná cena P^* a je možné ji vyjádřit jako

$$P^* = \lim_{t \to \infty} P_t. \tag{4.8}$$

Existuje-li tato limita (tj. konverguje-li posloupnost $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$, pak se hodnota posloupnosti P_t s běžícím časem blíží hodnotě P^*, která je rovnovážnou cenou.

Spojité Čas v těchto modelech je spojitou veličinou a zajímá nás, jak se vyvíjí rovnováha na trhu při nekonečně malých zpožděních na některé ze stran. Systémy s předpokladem nekonečně malého zpoždění (tj. se spojitě plynoucím časem) modelujeme diferenciálními rovnicemi. Opět můžeme rozlišit:

- **Spojité modely se zpožděním na straně nabídky** – Tyto modely můžeme obecně reprezentovat následující soustavou rovnic. Předpokládáme přitom, že spojité zpoždění na straně nabídky se projeví změnou ceny na straně poptávky:

$$\begin{aligned} S:\ \ Q(t) &= f_S(P(t)), \\ D:\ \ Q(t) &= f_D\left(P(t), \frac{dP(t)}{dt}\right). \end{aligned} \tag{4.9}$$

- **Spojité modely se zpožděním na straně poptávky** – Tyto modely můžeme obecně reprezentovat následující soustavou rovnic. Předpokládáme přitom, že spojité zpoždění na straně poptávky se projeví změnou ceny na straně nabídky:

$$\begin{aligned} S:\ \ Q(t) &= f_S\left(P(t), \frac{dP(t)}{dt}\right), \\ D:\ \ Q(t) &= f_D(P(t)). \end{aligned} \tag{4.10}$$

Řešením spojitého modelu je funkce $P(t)$ popisující vývoj ceny v čase. Opět nás zajímá, jestli $\lim_{t\to\infty} P(t)$ existuje a je konečná. Pokud ano, pak rovnovážnou cenu P^* vyjádříme jako

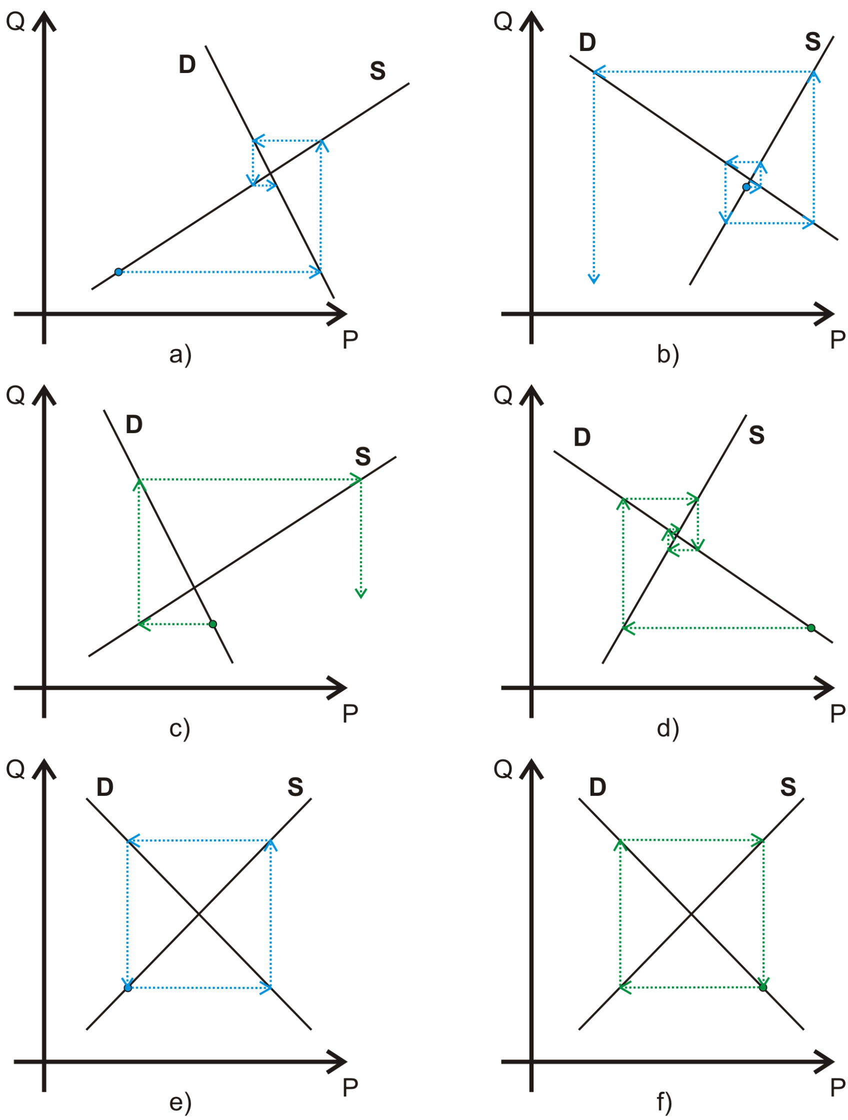
$$P^* = \lim_{t\to\infty} P(t). \tag{4.11}$$

Nyní už přejdeme ke konkrétním modelům hledání rovnováhy na trhu, kde se vyskytuje zpoždění.

4.4 Pavučinové modely – obecné předpoklady

Název této třídy modelů je odvozený od grafického znázornění posloupnosti popisující dosahování rovnováhy na trhu (obrázek 4.2). Nejdříve je nutné vymezit základní charakteristiky modelů patřících do této třídy a nezbytné předpoklady:

- Jde o **tržní modely** – popisují hledání/dosahování rovnováhy mezi nabídkou a poptávkou na trhu.
- Jde o **jednoduché modely** – v čase se mění pouze nezávisle proměnná (cena) a v reakci na ni také hodnota závisle proměnné podle vztahů daných funkcemi D a S. Nedochází ke změně funkčních závislostí v čase.
- Jde pouze o **dílčí modely** (tj. modely nepopisující celou ekonomiku), které:
  - popisují jeden trh (trh jediného statku),
  - zohledňují pouze cenu zmíněného statku (tj. neberou v úvahu ceny substitutů a komplementů, ceny na jiných trzích …),



Obrázek 4.2 Grafické znázornění pavučinových modelů – příklady. Modře jsou vyznačeny modely se zpožděním na straně nabídky, zeleně modely se zpožděním na straně poptávky. Ve všech případech jde o diskrétní modely s lineární nabídkovou i poptávkovou funkcí. Předpokládaná příčina nerovnováhy je nesprávné množství zboží na trhu, proto od každého počátečního bodu (označeny barevnými kolečky v jednotlivých grafech) je prvním krokem vždy korekce ceny.

- **nezohledňují důchod spotřebitele,**
- **nepředpokládají existenci zásob** (tj. nárůst poptávky po zboží není možné pokrýt okamžitě zbožím ze zásob), stejně tak není možné zboží/statek do zásob ukládat. V principu tedy předpokládáme, že jedinou možnou okamžitou

reakcí na nesprávné množství a cenu na trhu (tj. nerovnovážné množství a cenu) je změna ceny,
– **předpokládají dokonale konkurenční prostředí** (zejm. volný vstup a výstup firem z trhu, volnou alokaci zdrojů atd.).

Další předpoklady, které je třeba také jasně deklarovat, se týkají nabídkové a poptávkové funkce:

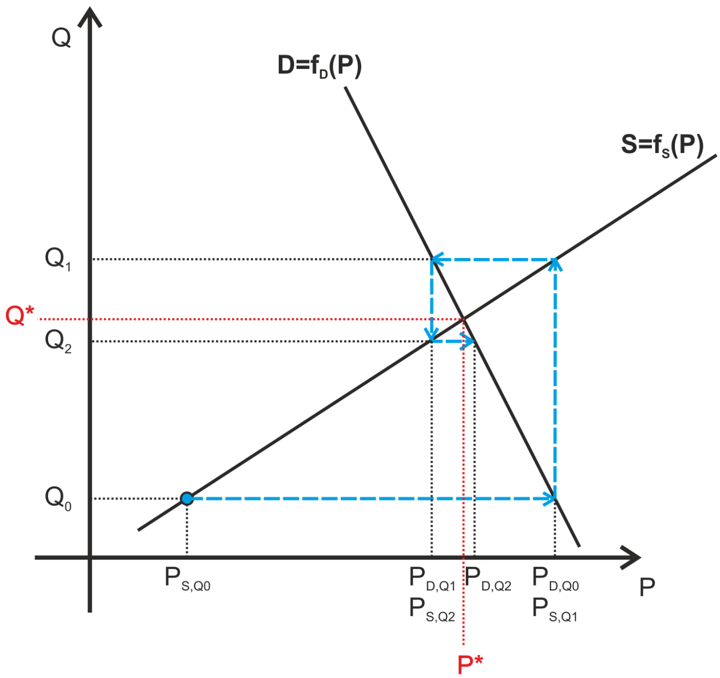
- Cena je v obou funkcích D i S nezávisle proměnnou, tj. platí vztahy (4.4) a (4.5),
- D je klesající funkcí,
- S je rostoucí funkcí,
- *rovnováha na trhu*, tj. stav, který chceme dosáhnout, je definován jako *stav, kdy neexistuje tlak na změnu* (tj. na změnu ceny nebo nabízeného množství statku),
- prvotní *příčinou nerovnováhy na trhu je nesprávné množství statku na daném trhu* (rovnováha se pak, vlivem existence zpoždění na jedné ze stran, v prvním kroku obnovuje změnou ceny).

4.4.1 Diskrétní model se zpožděním na straně nabídky – příklad fungování pavučinového modelu

Tento model popisuje situaci hledání rovnovážného množství a ceny z pohledu výrobců (firem), jejichž rozhodování o produkci je nutné činit s předstihem. Produkce takovýchto firem je tedy obvykle odvozena z poptávky po daném produktu v předešlém období. Zpoždění na straně nabídky se obvykle vyskytuje u statků, jejichž výroba určitou (nezanedbatelně dlouhou) dobu trvá. Snad nejvýraznějším příkladem této kategorie jsou potraviny a zemědělská produkce. Např. na základě toho, je-li letos dostatek obilí na trhu (tj. je-li převis nabídky nebo poptávky), je třeba naplánovat, kolik obilí zasít, aby bylo příští rok k dispozici na trhu správné množství (přičemž současné poptávané množství je přirozeně závislé na aktuální ceně, která nemusí být rovnovážná). Je zřejmé, že letošní nabízené množství obilí není v silách firem v krátkém čase navýšit (neboť by jej museli zasít, vypěstovat a sklidit, což nějakou dobu trvá; připomeňme, že pavučinové modely předpokládají neexistenci zásob). Na neuspokojení poptávky letos tedy nemohou reagovat navýšením nabízeného množství (u nutnosti snížení nabízeného množství už zpoždění nemusí být tak výrazné) a proto jediné, co se může změnit, je cena. V případě převisu poptávky tedy producenti mohou navýšit cenu až na úroveň, která odpovídá dostupnému množství na poptávkové křivce.

Obecně bychom jejich situaci mohli popsat následujícím řetězcem úvah, který se diskrétní pavučinový model se zpožděním na straně nabídky snaží popsat (graficky odpovídá dále popsaným úvahám situace na obrázku 4.3, který odpovídá jednoduchému lineárnímu modelu):

1. Na trhu existuje *nesprávné množství statku* Q_0 (jiné než rovnovážné) a jemu odpovídá cena P_{S,Q_0} za niž při daném množství statku na trhu výrobci jednotku



Obrázek 4.3 Ilustrace vývoje ceny a nabízeného/poptávaného množství statku při existenci zpoždění na straně nabídky. Červeně je vyznačen rovnovážný bod $[P^*, Q^*]$. Výchozím bodem modelu je bod $[P_{S,Q_0}, Q_0]$. Posloupnost cen se v čase vyvíjí následujícím způsobem $P_{S,Q_0} \to P_{D,Q_0} = P_{S,Q_1} \to P_{D,Q_1} = P_{S,Q_2} \to P_{D,Q_2} \cdots \to P^*$. Odpovídající množství statku na trhu v jednotlivých obdobích pak popisuje poslounost $Q_0 \to Q_1 \to Q_2 \to \cdots \to Q^*$. V tomto případě je model konvergentní a rovnovážný stav $[P^*, Q^*]$ je dosažitelný.

statku nabízejí, a P_{D,Q_0} tj. cena, kterou jsou za jednotku statku (při daném celkovém množství statku na trhu) spotřebitelé ochotni zaplatit. Jelikož množství Q_0 není rovnovážné, pak je zřejmé, že cena akceptovatelná pro stranu nabídky a pro stranu poptávky se musí lišit, tj. $P_{S,Q_0} \neq P_{D,Q_0}$.

2. *Výrobci se* v této situaci *snaží* nesprávné množství statku změnit – tj. *změnit objem výroby*. Na základě aktuální situace na trhu mohou být potřebné 2 strategie:

   - Výrobci se snaží zvýšit objem výroby, je-li zboží nedostatek. Toto je nejčastějším zdrojem zpoždění – výroba daného statku nějakou dobu trvá a neexistují zásoby, z nichž by mohla být neuspokojená poptávka spotřebitelů pokryta okamžitě. Právě tato situace nastává v obrázku 4.3.
   - Výrobci se snaží snížit objem výroby, je-li zboží přebytek (tj. existuje-li převis nabídky nad poptávkou). Snížení nabízeného množství nemusí nutně znamenat vznik zpoždění, nicméně pokud nemohou být vytvářeny zásoby, snížení množství zboží/statku je možné jen jeho zničením, rozdáním nebo prodáním.

Ani jeden z těchto kroků tedy nemusí být v krátkém čase realizovatelný. My nyní budeme pro popis dalších kroků předpokládat, že zboží je na trhu nedostatek (v souladu s obrázkem 4.3), což znamená že $P_{S,Q_0} < P_{D,Q_0}$. Tento vztah souhlasí i s intuitivním chápáním situace na trhu – jestli je zboží/statku nedostatek, jsou kupující ochotni zaplatit více, aby získali alespoň několik jeho jednotek. Poptávková cena jedné jednotky statku při jeho daném množství na trhu je tedy aktuálně vyšší, než nabídková cena. A my se nyní nacházíme v bodě $[P_{S,Q_0}, Q_0]$.

3. Jelikož nabízené množství není možné okamžitě zvýšit, vzroste cena daného statku, a to až na úroveň, která odpovídá poptávce (tj. až na úroveň, kterou jsou spotřebitelé maximálně ochotni za dané množství statku na trhu zaplatit). Tj. $P_{S,Q_0} \rightarrow P_{D,Q_0}$. Nyní se tedy nacházíme v bodě $[P_{D,Q_0}, Q_0]$.
4. Cena P_{D,Q_0}, za niž se nyní jednotka statku na trhu prodává, je vyšší než minimální cena, za kterou byli výrobci ochotni jednotku statku prodávat – pro výrobce je tedy atraktivní daný statek produkovat a nastává zvýšení produkce statku (a případně i vstup dalších firem na trh), což vyústí v navýšení výroby (přirozeně až v dalším čase/období). V dalším období je tedy nabízeno množství $Q_1 = f_S(P_{D,Q_0})$, které je značně vyšší, než Q_0. Toto množství je na trhu nabízeno za cenu $P_{S,Q_1} = P_{D,Q_0}$.
5. Jsme nyní v bodě $[P_{S,Q_1}, Q_1]$, kdy na trhu je při relativně vysoké ceně nabízeno větší množství statku, než jsou spotřebitelé za tuto cenu ochotni koupit. Jelikož výrobci chtějí prodat celou svou produkci (opět připomeňme, že nesmí existovat zásoby, tj. rozhodování výrobců se uskutečňuje v intencích „prodám za nižší cenu“ nebo „vyhodím a nemám žádný příjem“), klesne cena až na úroveň, za niž jsou spotřebitelé ochotni dané množství statku nakupovat, tj. na P_{D,Q_1}, která je výrazně menší než P_{S,Q_1}.
6. Při ceně P_{D,Q_1} není pro výrobce atraktivní vyrábět vysoké množství statku (Q_1) a proto na příští období naplánují takový rozsah produkce Q_2, který odpovídá ceně $P_{D,Q_1} = P_{S,Q_2}$ (tj. sníží nabízené množství na takové, jaké jsou ochotni při této ceně vyrábět, případně odvětví/trh opustí). V dalším období je tedy nabízeno množství Q_2, které je menší než Q_1. Jsme nyní v bodě $[P_{S,Q_2}, Q_2]$ Tj. na trhu je nedostatečné množství statku (a v tomto období jej není možné navýšit). Za množství Q_2 (nižší než rovnovážné) by spotřebitelé byli ochotni zaplatit i více než P_{S,Q_2} a to až P_{D,Q_2} ... (a pokračujeme na bod 3).

Výše uvedený příklad v šesti bodech popisuje souvislost existence zpoždění na jedné ze stran trhu s oscilacemi jednotkové ceny a dostupného množství statku na trhu, byť ve velice zjednodušeném kontextu. V další sekci se blíže podíváme na to, za jakých podmínek bude trh, na němž se vyskytuje zpoždění ma jedné ze stran, směřovat k rovnovážnému stavu.

4.4.2 Lineární diskrétní pavučinový model se zpožděním na straně nabídky – odvození kritérií konvergence

Nyní si odvodíme odpovídající diskrétní pavučinový model se zpožděním na straně nabídky. Uvažujme nyní pro zjednodušení lineární křivky nabídky a poptávky s obvyklými sklony, tedy pro $t \in \mathbb{N}_0$:

$$S: \ Q_S(t) = f_S(P(t-1)) = -a + b \cdot P_{t-1} \tag{4.12}$$

Strana nabídky je tedy zpožděná a reprezentovaná lineární nabídkovou funkcí. Analogicky zavedeme poptávkovou funkci:

$$D: \ Q_D(t) = f_D(P(t)) = c - d \cdot P_t. \tag{4.13}$$

Přitom předpokládáme, že $a,b,c,d > 0$, tedy že $a,b,c,d \in \mathbb{R}^+$. Symbol $-a$ v rovnici (4.12) reflektuje požadavek, aby v případě, kdy by z nějakého důvodu vycházelo $P_{t-1} = 0$ (nebo kdyby cena předchozího období byla nule velmi blízká), nevycházelo kladné nabízené množství $Q_S(t)$. Jinak řečeno, zavedením záporného absolutního členu do rovnice (4.12) říkáme, že za nulovou cenu (nebo za velice nízkou cenu) nebudou výrobci ochotni nabízet kladné množství statku. Požadavek $b > 0$ zajišťuje, aby nabídková funkce $Q_S(t)$ byla rostoucí. Symbol $-d$ v rovnici (4.13) pak zaručuje záporný sklon křivky poptávky, zatímco požadavek $c > 0$ říká, že při nulové (či velmi malé) ceně budou spotřebitelé ochotni nakupovat nenulové množství statku. Všechny 4 podmínky na parametry modelu tedy popisují „rozumné" nabídkové a poptávkové funkce. Podmínku rovnováhy na daném trhu nyní můžeme psát ve tvaru

$$Q_S(t) = Q_D(t), \tag{4.14}$$

což na základě (4.12) a (4.13) znamená v našem konkrétním případě

$$-a + b \cdot P_{t-1} = c - d \cdot P_t. \tag{4.15}$$

Posuneme-li o jednotku čas v rovnici (4.15) a mírně ji upravíme, dostáváme lineární diferenční rovnici s konstantní pravou stranou, která popisuje vývoj ceny v čase:

$$d \cdot P_{t+1} + b \cdot P_t = c + a. \tag{4.16}$$

Řešením rovnice (4.16) je posloupnost $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$. Obecný tvar t-tého členu této posloupnosti může čtenář, který si je v řešení diferenčních rovnic jistý, nalézt v rovnici (4.26). Pro ostatní čtenáře popíšeme postup řešení této diferenční rovnice krok po kroku, aby nebyli ochuzeni o možnost případného zobecnění modelu. Jelikož se jedná o nehomogenní diferenční rovnici, budeme hledat její řešení ve tvaru

$$P_t = P_t^H + P_t^{Part}, \tag{4.17}$$

kde P_t^H je řešením homogenní lineární diferenční rovnice

$$d \cdot P_{t+1} + b \cdot P_t = 0 \tag{4.18}$$

a P_t^{Part} je libovolným partikulárním řešením rovnice (4.16). Začneme nalezením P_t^H. Za tímto účelem nejdříve hledáme kořeny charakteristického polynomu rovnice (4.18), který získáme tak, že v (4.18) nahradíme každý výskyt P_i výrazem λ^{i-t}, $i = t, t+1, \ldots$ Dostáváme tak

$$d \cdot \lambda^1 + b \cdot \lambda^0 = 0 \tag{4.19}$$

a odtud

$$\lambda = -\frac{b}{d}. \tag{4.20}$$

Hledané řešení homogenní diferenční rovnice (4.18), tj. P_t^H, potom můžeme psát ve tvaru

$$P_t^H = c_1 \cdot \lambda^t = c_1 \cdot \left(-\frac{b}{d}\right)^t, \quad c_1 \in \mathbb{R} \tag{4.21}$$

Zbývá nám najít libovolné konkrétní (partikulární) řešení nehomogenní rovnice (4.16). Jelikož je na pravé straně této rovnice konstanta, zkusíme nalézt partikulární řešení také ve tvaru konstanty, tedy $P_t^{Part} = k$ pro každé $t \in \langle 0, \infty)$, kde $k \in \mathbb{R}$ je konstanta. Hledáme nyní $k \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$d \cdot k + b \cdot k = c + a. \tag{4.22}$$

Z (4.22) snadno dostaneme

$$k = \frac{c+a}{d+b} = P_t^{Part}. \tag{4.23}$$

Jelikož jsme hledali řešení P_t původní diferenční rovnice (4.16) ve tvaru (4.17), dostáváme:

$$P_t = P_t^H + P_t^{Part} = c_1 \cdot \left(-\frac{b}{d}\right)^t + \frac{c+a}{d+b}. \tag{4.24}$$

Aby (4.24) bylo jednoznačným řešením, musíme ještě určit hodnotu konstanty c_1, kterou jako jedinou zatím neznáme. K tomu potřebujeme tzv. *počáteční podmínku* ve tvaru $P_0 = p_o$, kde $p_0 \in \mathbb{R}_0^+$, tj. stačí nám znát výchozí cenu P_0 na trhu v čase $t = 0$. Dosadíme-li tuto hodnotu do (4.24), dostáváme

$$p_0 = c_1 \cdot \left(-\frac{b}{d}\right)^0 + \frac{c+a}{d+b} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = p_0 - \frac{c+a}{d+b}. \tag{4.25}$$

Tím pádem můžeme řešení původní diferenční rovnice (4.16) zapsat jako

$$P_t = P_t^H + P_t^{Part} = \left(p_0 - \frac{c+a}{d+b}\right) \cdot \left(-\frac{b}{d}\right)^t + \frac{c+a}{d+b}. \tag{4.26}$$

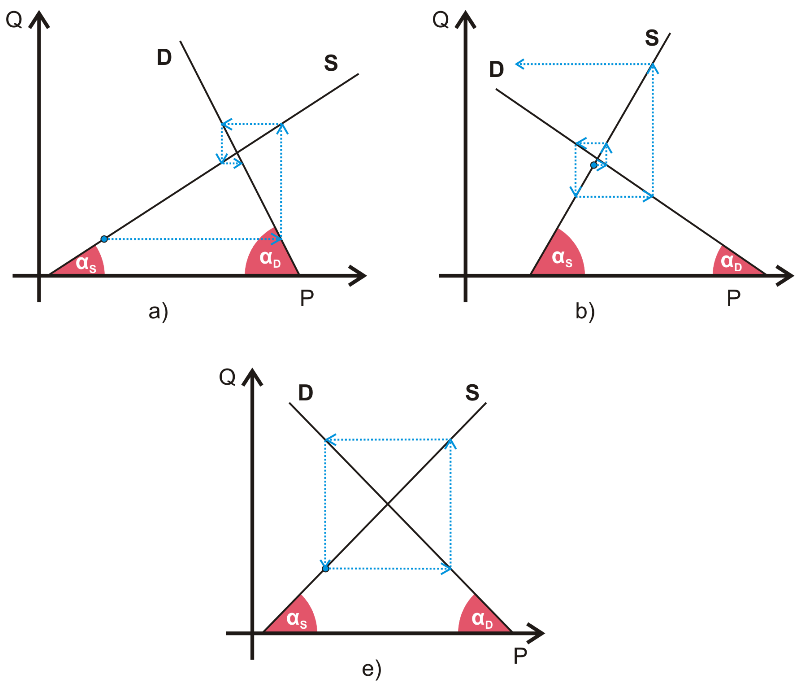
Nyní tedy už víme, jak bude vypadat cena v libovolném čase t. Jelikož jsme sestavovali model pro nalezení rovnovážné ceny a množství, přirozeně nás nyní zajímá, za jakých podmínek je rovnovážná cena skutečně dosažitelná. Podmínku existence rovnovážné ceny můžeme formulovat jako podmínku existence konečné limity výrazu (4.26). Jinak řečeno, rovnovážná cena existuje právě tehdy, když

$$\lim_{t\to\infty} P_t = \lim_{t\to\infty}\left[\left(p_0 - \frac{c+a}{d+b}\right)\cdot\left(-\frac{b}{d}\right)^t + \frac{c+a}{d+b}\right] < \infty. \tag{4.27}$$

Snadno můžeme nahlédnout, že (4.27) platí tehdy a jen tehdy, když $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{b}{d}\right)^t < \infty$, tj. když $b < d$. Jinými slovy, jestliže $b < d$, pak se posloupnost cen $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$ bude v čase blížit rovnovážné ceně $P^* = P_\infty$. Tato rovnovážná cena se také dá určit přímo z (4.27):

$$\lim_{t\to\infty} P_t = P_\infty = P^* = \frac{c+a}{d+b}. \tag{4.28}$$

Jen pro úplnost, pro $b = d$ bude P_∞ oscilovat mezi dvěma hodnotami, konkrétně p_0 a $\left[2\frac{(c+a)}{d+b} - p_0\right]$, a rovnováha tedy není dosažitelná. Pro $b > d$ pak posloupnost $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$ diverguje a cena se od teoretické rovnovážné ceny v čase stále vzdaluje.



Obrázek 4.4 Souvislost konvergence/divergence modelu při existenci zpoždění na straně poptávky se sklony nabídkové a poptávkové křivky. Jednotlivé dílčí grafy odpovídají stejně označeným grafům v Obrázku 4.2.

Nerovnost $b < d$ můžeme interpretovat také pomocí sklonů křivek nabídky a poptávky. Jestliže sklon b nabídkové křivky (který od povídá tangentě směrového úhlu α_S tečny k nabídkové křivce v daném bodě[1], tj. $b = \text{tg}(\alpha_S)$) je menší, než sklon d poptávkové křivky (tedy než tangenta směrového úhlu α_D tečny k poptávkové křivce v daném bodě[2]; $d = \text{tg}(\alpha_D)$), tedy platí-li $\text{tg}(\alpha_S) < \text{tg}(\alpha_D)$ tj. $\alpha_S < \alpha_D$, pak bude posloupnost $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$ konvergovat k rovnovážné ceně P^*. Rovnováha bude v tomto případě dosažitelná (viz obrázek 4.4 – podgraf a). Naopak v případě, kdy $\alpha_S > \alpha_D$, bude model divergovat (viz obrázek 4.4 – podgraf b). Pro $\alpha_S = \alpha_D$ pak vzniká cyklus, a tedy ani v tomto případě není rovnováhy dosaženo (viz obrázek 4.4 – podgraf e).

Zajímavým zjištěním plynoucím z našich výpočtů je, že dosažitelnost rovnováhy v diskrétním modelu se zpožděním na straně nabídky je závislá čistě na sklonu nabídkové a poptávkové funkce. *Jestliže je sklon poptávkové funkce větší než sklon nabídkové funkce, tedy jestliže poptávka reaguje na změnu ceny výrazněji než nabídka, pak je rovnováha dosažitelná.*

Obdobným způsobem bychom mohli odvodit také model se zpožděním na straně poptávky, popřípadě i spojitý model se zpožděním.

4.4.3 Spojitý model se zpožděním na straně nabídky

Ve spojitém případě budeme opět předpokládat typicky skloněné křivky D a S. Také v tomto případě je cena funkcí času, tedy $P = P(t)$. Předpokládáme, že spojité zpoždění na straně nabídky se projeví změnou ceny na straně poptávky. Model tedy obecně můžeme zapsat ve tvaru (4.29) a (4.30).

$$S: \quad Q_S(t) = f_S(P(t)) \tag{4.29}$$

$$D: \quad Q_D(t) = f_D\left(P(t), \frac{dP(t)}{dt}\right) \tag{4.30}$$

Pro zjednodušení budeme jak nabídkovou, tak i poptávkovou funkci uvažovat v lineárním tvaru, tedy:

$$S: \quad Q_S(t) = -r + s \cdot P(t), \quad \text{kde } r, s > 0 \tag{4.31}$$

$$D: \quad Q_D(t) = m - n \cdot P(t) - \alpha \cdot \frac{dP(t)}{dt}, \quad \text{kde } m, n, \alpha > 0 \tag{4.32}$$

Podmínku rovnováhy na daném trhu můžeme opět psát ve tvaru

$$Q_S(t) = Q_D(t),$$

[1] Zajímá nás přitom bod teoretické statické rovnováhy, tj. průsečík funkcí D a S – v něm bychom měli zkoumat směrové úhly tečen, zajímá-li nás dosažitelnost rovnovážného stavu. V lineárním modelu je však sklon křivky D stále stejný, stejně tak jako sklon křivky S.

[2] Viz předchozí poznámku pod čarou.

tedy v našem konkrétním lineárním případě dostáváme podmínku rovnováhy ve tvaru

$$-r + s \cdot P(t) = m - n \cdot P(t) - \alpha \cdot \frac{dP(t)}{dt}. \tag{4.33}$$

Připomeňme, že statické rovnováhy je dosaženo, jestliže platí

$$-r + s \cdot P^* = m - n \cdot P^*. \tag{4.34}$$

Tím máme zaveden zjednodušený spojitý model se zpožděním na straně nabídky a můžeme se pustit do jeho řešení. Model je nyní formulován jako lineární diferenciální rovnice (4.33), jejímž řešením je funkce $P(t)$ popisující vývoj ceny v čase. Vzhledem k tomu, že nás zajímá dosažitelnost rovnovážného stavu, nebudeme nyní hledat přímo funkci $P(t)$, ale pokusíme se najít funkci popisující odchylky aktuální ceny od ceny rovnovážné, tj. funkci $p(t) = (P(t) - P^*)$. Jestliže se tyto odchylky v čase budou snižovat a pro $t \to \infty$ se budou limitně blížit nule, pak je rovnovážný stav dosažitelný (jelikož odchylka ceny od ceny rovnovážné je limitně nulová, tedy obě tyto ceny jsou po dostatečně dlouhé době totožné). Začneme tedy tím, že odečteme (4.34) od (4.33) a dostáváme:

$$s \cdot (P(t) - P^*) = -n \cdot (P(t) - P^*) - \alpha \cdot \frac{dP(t)}{dt}, \tag{4.35}$$

což na základě $p(t) = (P(t) - P^*)$ můžeme psát jako:

$$s \cdot p(t) = -n \cdot p(t) - \alpha \cdot \frac{dP(t)}{dt}. \tag{4.36}$$

Pro úplnost potřebujeme ještě určit hodnotu $\frac{dp(t)}{dt}$:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{d(P(t) - P^*)}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} - \frac{dP^*}{dt} = \frac{dP(t)}{dt}. \tag{4.37}$$

Rovnici (4.36) tedy můžeme přepsat na

$$s \cdot p(t) = -n \cdot p(t) - \alpha \cdot \frac{dp(t)}{dt}, \tag{4.38}$$

a následnými úpravami na

$$\frac{(s+n)}{-\alpha} \cdot p(t) = \frac{dp(t)}{dt}, \tag{4.39}$$

což je opět jednoduchá lineární diferenciální rovnice. Můžeme ještě mírně zjednodušit zápis a označit $\frac{(s+n)}{-\alpha} = c$, čímž dostáváme

$$c \cdot p(t) = \frac{dp(t)}{dt}, \tag{4.40}$$

což lze přeformulovat jako

$$c \cdot dt = \frac{dp(t)}{p(t)}. \tag{4.41}$$

Obě strany rovnice (4.41) můžeme nyní zintegrovat, čímž dostaneme

$$c \cdot t + \ln K = \ln|p(t)|. \tag{4.42}$$

Po odlogaritmování (použitím exponenciální funkce) dostáváme

$$e^{c \cdot t} \cdot K = |p(t)|. \tag{4.43}$$

Substitucí původního významu konstanty c do (4.43) pak dostaneme

$$e^{\frac{s+n}{-\alpha} \cdot t} \cdot K = |p(t)|. \tag{4.44}$$

Abychom určili hodnotu konstanty K, musíme podobně jako v diskrétním modelu zohlednit počáteční podmínku $p(0) = p_0$, jinak řečeno musíme znát počáteční odchylku p_0 původní nerovnovážné ceny $P(0)$ od teoretické rovnovážné ceny P^*. Dosazením $p(0) = p_0$ do (4.44) dostáváme

$$e^{\frac{s+n}{-\alpha} \cdot 0} \cdot K = K = |p_0|, \tag{4.45}$$

navíc cenu nikdy neuvažujeme zápornou, a proto $|p_0| = p_0$ a tedy řešení diferenciální rovnice (4.41) dostáváme ve tvaru

$$e^{\frac{s+n}{-\alpha} \cdot t} \cdot p_0 = |p(t)|. \tag{4.46}$$

Nyní nás tedy zajímá, jestli $|p(t)|$ konverguje k nule, tedy jestli se odchylka aktuální ceny od teoretické rovnovážné ceny v čase stále snižuje až na nulu. Podmínku konvergence můžeme shrnout následujícím způsobem:

$$\lim_{t \to \infty} \left(e^{\frac{s+n}{-\alpha} \cdot t} \cdot p_0 \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \left(e^{\frac{s+n}{-\alpha} \cdot t} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{s+n}{\alpha} > 0. \tag{4.47}$$

Vzhledem k tomu, že v předpokladech formulace modelu (4.33) a (4.34) máme jasně uvedeno, že $s, n, \alpha > 0$, (4.47) je splněno vždy a model tedy při spojitém zpoždění konverguje vždy k rovnovážnému stavu. Je také dobré si uvědomit, že konvergence modelu nezávisí na sklonu křivek S a D (pokud S je rostoucí a D je klesající funkcí ceny), ale pouze na znaménku koeficientu α. Pro $\alpha > 0$ změna ceny $\frac{dP(t)}{dt}$ tlumí zpoždění.

4.5 Cvičení – odvození modelů se zpožděním na straně poptávky

V předchozím textu jsme odvodili diskrétní i spojitý pavučinový model se zpožděním na straně nabídky. K oběma jsme také odvodili podmínku konvergence, tj. podmínku dosažitelnosti rovnovážného stavu na trhu. Jak by se situace změnila, kdyby zpoždění existovalo na straně poptávky? V této části textu si na tuto otázku zkusíme odpovědět. Vzhledem k tomu, že odvození obou modelů (diskrétního i spojitého) je čistou analogií postupů uvedených výše, může tato část sloužit také jako dobré cvičení pro čtenáře, že správně porozuměl jednotlivým modelům, jejich konstrukci a omezení. Oba modely na tomto místě sice odvodíme, ale bez rozsáhlejších komentářů (ty by byly tak jako tak analogické komentářům u odvozování modelů se zpožděním na straně nabídky).

4.5.1 *Diskrétní model se zpožděním na straně poptávky – odvození podmínky dosažitelnosti rovnovážného stavu*

Základní rovnice pro *lineární diskrétní model*, v němž se *zpoždění* vyskytuje *na straně poptávky* (uvažujeme pro jednoduchost opět zpoždění o jedno období), je možné charakterizovat následujícími rovnicemi:

$$S:\ Q_S(t) = f_S(P(t)) = -a + b \cdot P_t \tag{4.48}$$

$$D:\ Q_D(t) = f_D(P(t-1)) = c - d \cdot P_{t-1}, \tag{4.49}$$

kde $t \in \langle ,\infty)$ a uvažujeme lineární křivky nabídky a poptávky s obvyklými sklony, tj. $a,b,c,d > 0$. Podmínku rovnováhy na daném trhu opět můžeme formulovat následujícím způsobem

$$Q_S(t) = Q_D(t), \tag{4.50}$$

tedy

$$-a + b \cdot P_t = c - d \cdot P_{t-1}. \tag{4.51}$$

Posunutím časového indexu v rovnici (4.51) o jednotku dopředu získáme:

$$-a + b \cdot P_{t+1} = c - d \cdot P_t \tag{4.52}$$

a převedením výrazů s proměnnou t na stejnou stranu dostáváme:

$$b \cdot P_{t+1} + d \cdot P_t = c + a. \tag{4.53}$$

Nyní musíme tedy najít posloupnost $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$, která je řešením diferenční rovnice (4.53). Obecný tvar t-tého členu této posloupnosti opět hledáme ve tvaru

$$P_t = P_t^H + P_t^{Part}, \tag{4.54}$$

kde P_t^H je řešením homogenní lineární diferenční rovnice

$$b \cdot P_{t+1} + d \cdot P_t = 0 \tag{4.55}$$

a P_t^{Part} je libovolným partikulárním řešením rovnice (4.53). Začneme nalezením P_t^H, které hledáme ve tvaru:

$$P_t^H = c_1 \cdot \lambda^t, \tag{4.56}$$

kde λ je kořenem charakteristického polynomu rovnice (4.55), který získáme tak, že v (4.55) nahradíme každý výskyt P_i výrazem λ^{i-t}, $i = t, t+1, \dots$ Dostáváme tak

$$b \cdot \lambda^1 + d \cdot \lambda^0 = 0 \tag{4.57}$$

a odtud

$$\lambda = -\frac{d}{b}. \tag{4.58}$$

Hledané řešení homogenní diferenční rovnice (4.55), tj. P_t^H, potom můžeme psát ve tvaru

$$P_t^H = c_1 \cdot \left(-\frac{b}{d}\right)^t, \quad c_1 \in \mathbb{R} \tag{4.59}$$

Nyní nám zbývá nalézt artikulární řešení nehomogenní rovnice (4.53). Jelikož je na pravé straně této rovnice konstanta, hledáme partikulární řešení také ve tvaru konstanty, tedy $P_t^{Part} = k$ pro každé $t \in \langle 0, \infty)$, kde $k \in \mathbb{R}$ je konstanta. Hledáme tedy $k \in \mathbb{R}$, pro které platí

$$b \cdot k + d \cdot k = c + a. \tag{4.60}$$

A odtud dostáváme

$$k = \frac{c+a}{b+d} = P_t^{Part}. \tag{4.61}$$

Řešení původní diferenční rovnice (4.53) tedy nyní na základě (4.54) máme ve tvaru:

$$P_t = P_t^H + P_t^{Part} = c_1 \cdot \left(-\frac{d}{b}\right)^t + \frac{c+a}{b+d}. \tag{4.62}$$

Aby (4.62) bylo jednoznačným řešením, musíme ještě určit hodnotu konstanty c_1, a to zohledněním *počáteční podmínky* ve tvaru $P_0 = p_o$, kde $p_0 \in \mathbb{R}_0^+$, tj. využitím znalosti výchozí ceny P_0 na trhu v čase $t = 0$. Dosadíme-li tuto hodnotu do (4.62), dostáváme

$$p_0 = c_1 \cdot \left(-\frac{d}{b}\right)^0 + \frac{c+a}{b+d} \qquad \Rightarrow \qquad c_1 = p_0 - \frac{c+a}{b+d}. \tag{4.63}$$

Tím pádem můžeme řešení původní diferenční rovnice (4.53) zapsat jako

$$P_t = P_t^H + P_t^{Part} = \left(p_0 - \frac{c+a}{b+d}\right) \cdot \left(-\frac{d}{b}\right)^t + \frac{c+a}{b+d}. \tag{4.64}$$

Všimněme si, že (4.64) se od řešení analogického modelu se zpožděním na straně nabídky (4.26) liší v jediném členu. Řešení modelu se zpožděním na straně poptávky závisí na $\left(-\frac{d}{b}\right)^t$, kdežto řešení modelu se zpožděním na straně nabídky $\left(-\frac{b}{d}\right)^t$, jinak jsou řešení totožná. Podmínku existence rovnovážné ceny můžeme opět formulovat jako podmínku existence konečné limity výrazu (4.64). Jinak řečeno, rovnovážná cena existuje právě tehdy, když

$$\lim_{t\to\infty} P_t = \lim_{t\to\infty}\left[\left(p_0 - \frac{c+a}{b+d}\right)\cdot\left(-\frac{d}{b}\right)^t + \frac{c+a}{b+d}\right] < \infty. \tag{4.65}$$

Limita (4.65) je konečná tehdy a jen tehdy, když $\lim_{t\to\infty}\left(-\frac{d}{b}\right)^t < \infty$, tj. když $b > d$. Jinými slovy jestliže $b > d$, pak se posloupnost cen $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$ bude v čase bude blížit rovnovážné ceně $P^* = P_\infty$. Tato rovnovážná cena se také dá určit přímo z (4.65):

$$\lim_{t\to\infty} P_t = P_\infty = P^* = \frac{c+a}{b+d}. \tag{4.66}$$

Je přirozené, že rovnovážná cena pro model se zpožděním na straně nabídky (4.27) je totožná s rovnovážnou cenou pro model se zpožděním na straně poptávky (4.65), jelikož oba modely mají stejný bod statické rovnováhy. Existence zpoždění a jeho umístění na některé ze stran (D nebo S) jen ovlivňuje způsob dosahování (případně nedosahování) rovnováhy. Pro $d = b$ bude P_∞ opět oscilovat mezi dvěma hodnotami (p_0 a $\left[\frac{2(c+a)}{b+d} - p_0\right]$) a rovnováha tedy není dosažitelná. Pro $b < d$ pak posloupnost $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$ diverguje a cena se od teoretické rovnovážné ceny v čase stále vzdaluje.

Nerovnost $b > d$ můžeme opět interpretovat také pomocí sklonů křivek nabídky a poptávky. Jestliže sklon nabídkové křivky b (který od povídá tangentě směrového úhlu α_S tečny k nabídkové křivce v daném bodě, tj. $b = \mathrm{tg}(\alpha_S)$) je větší než sklon poptávkové křivky d (tedy než tangenta směrového úhlu α_D tečny k poptávkové křívce v daném bodě; $d = \mathrm{tg}(\alpha_D)$), tedy platí-li $\mathrm{tg}(\alpha_S) > \mathrm{tg}(\alpha_D)$ tj. $\alpha_S > \alpha_D$, pak bude posloupnost $\{P_t\}_{t=0}^{\infty}$ konvergovat k rovnovážné ceně P^*. Rovnováha bude v tomto případě dosažitelná (viz obrázek 4.4 – podgraf d). Naopak v případě, kdy $\alpha_S < \alpha_D$, bude model divergovat (viz obrázek 4.4 – podgraf c). Pro $\alpha_S = \alpha_D$ pak vzniká cyklus, a tedy ani v tomto případě není rovnováhy dosaženo (viz obrázek 4.4 – podgraf f).

I v tomto případě se potvrzuje, že dosažitelnost rovnováhy v diskrétním modelu se zpožděním na straně nabídky, je závislá čistě na sklonu nabídkové a poptávkové funkce. *Jestliže je sklon poptávkové funkce menší než sklon nabídkové funkce, tedy jestliže poptávka reaguje na změnu ceny méně výrazně než nabídka, pak je rovnováha dosažitelná.*

4.5.2 Spojitý model se zpožděním na straně poptávky – odvození podmínky dosažitelnosti rovnovážného stavu

Nyní se podíváme na to, jak zpoždění na straně poptávky ovlivňuje dosahování rovnovážného stavu v případě spojitého modelu. Uvažujeme opět klasicky skloněné křivky D a S, pro jednoduchost budeme u obou opět předpokládat, že jsou lineární. Stejně jako v předchozích případech předpokládáme, že je cena funkcí času, tedy $P = P(t)$. Také předpokládáme, že zpoždění je na straně poptávky a že je nekonečně malé (spojitý model; zpoždění se projeví jako změna ceny na straně nabídky). Výchozí obecný model můžeme zapsat následujícím způsobem:

$$S: \quad Q_S(t) = f_S\left(P(t), \frac{dP(t)}{dt}\right) \tag{4.67}$$

$$D: \quad Q_D(t) = f_D\left(P(t)\right) \tag{4.68}$$

Což v situaci, kdy nabídkovou i poptávkovou funkci uvažujeme v lineárním tvaru, znamená:

$$S: \quad Q_S(t) = -r + s \cdot P(t) + \alpha \cdot \frac{dP(t)}{dt}, \quad \text{kde } r, s, \alpha > 0 \tag{4.69}$$

$$D: \quad Q_D(t) = m - n \cdot P(t), \quad \text{kde } m, n > 0 \tag{4.70}$$

Podmínku rovnováhy na daném trhu můžeme opět psát ve tvaru

$$Q_S(t) = Q_D(t),$$

tedy v našem konkrétním případě dostáváme:

$$-r + s \cdot P(t) + \alpha \cdot \frac{dP(t)}{dt} = m - n \cdot P(t). \tag{4.71}$$

Připomeňme, že statické rovnováhy je dosaženo, jestliže platí

$$-r + s \cdot P^* = m - n \cdot P^*, \tag{4.72}$$

kde P^* je rovnovážná cena (cena odpovídající statické rovnováze bez existence zpoždění). Řešením lineární diferenciální rovnice (4.71) je funkce $P(t)$ popisující vývoj ceny v čase. Opět přejdeme k odchylkám $p(t)$ od rovnovážné ceny P^*, tj. $(p(t) = P(t) - P^*)$. Odečtením (4.72) od (4.71) a dostáváme:

$$s \cdot (P(t) - P^*) + \alpha \cdot \frac{dP(t)}{dt} = -n \cdot (P(t) - P^*), \tag{4.73}$$

což na základě $p(t) = (P(t) - P^*)$ můžeme psát jako:

$$s \cdot p(t) + \alpha \cdot \frac{dP(t)}{dt} = -n \cdot p(t). \tag{4.74}$$

Pro úplnost opět potřebujeme určit hodnotu $\frac{dp(t)}{dt}$:

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{d(P(t) - P^*)}{dt} = \frac{dP(t)}{dt} - \frac{dP^*}{dt} = \frac{dP(t)}{dt}. \tag{4.75}$$

Rovnici (4.74) tedy můžeme přepsat na

$$s \cdot p(t) + \alpha \cdot \frac{dp(t)}{dt} = -n \cdot p(t), \tag{4.76}$$

a tedy

$$\frac{dp(t)}{dt} = \frac{-n - s}{\alpha} \cdot p(t), \tag{4.77}$$

což je opět jednoduchá lineární diferenciální rovnice. Můžeme ještě mírně zjednodušit zápis a označit $\frac{-n-s}{\alpha} = c$, čímž dostáváme

$$\frac{dp(t)}{dt} = c \cdot p(t), \tag{4.78}$$

což lze přeformulovat jako

$$\frac{dp(t)}{p(t)} = c \cdot dt. \tag{4.79}$$

Obě strany rovnice (4.79) zintegrujeme a dostáváme

$$\ln|p(t)| = c \cdot t + \ln K. \tag{4.80}$$

Po odlogaritmování dostáváme

$$|p(t)| = e^{c \cdot t} \cdot K. \tag{4.81}$$

Substitucí původního významu konstanty $c = \frac{-n-s}{\alpha}$ do (4.81) pak dostaneme

$$|p(t)| = e^{\frac{-n-s}{\alpha} \cdot t} \cdot K. \tag{4.82}$$

Opět zohledníme počáteční podmínku $p(0) = p_0$, abychom určili hodnotu konstanty K:

$$|p_0| = e^{\frac{-n-s}{\alpha} \cdot 0} \cdot K = K, \tag{4.83}$$

a tedy řešení diferenciální rovnice (4.79) dostáváme ve tvaru

$$|p(t)| = e^{\frac{-n-s}{\alpha} \cdot t} \cdot |p_0|. \tag{4.84}$$

Nyní nás tedy zajímá, jestli $|p(t)|$ konverguje k nule, tedy jestli se odchylka aktuální ceny od teoretické rovnovážné ceny v čase stále snižuje až na nulu. Podmínku konvergence můžeme shrnout následujícím způsobem:

$$\lim_{t \to \infty} \left(e^{\frac{-n-s}{\alpha} \cdot t} \cdot |p_0| \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{t \to \infty} \left(e^{\frac{-n-s}{\alpha} \cdot t} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{-n - s}{\alpha} < 0. \tag{4.85}$$

Všimněme si, že $\frac{-n-s}{\alpha} = \frac{-(n+s)}{\alpha} = \frac{n+s}{-\alpha}$, tedy řešení (4.84), je ve skutečnosti totožné jako řešení spojitého modelu se zpožděním na straně nabídky (4.46). Oba modely tedy konvergují za předpokladu, že $n, s, \alpha > 0$.

Shrnutí

Pavučinové modely popisují proces formování rovnováhy na trhu při existenci zpoždění. Jako takové jsou zobecněním statických modelů, které uvažují, že nabídka i poptávka reagují na změnu ceny okamžitě. Zpoždění je vyvoláno neschopností buď nabídky, nebo poptávky reagovat okamžitě na změnu ceny zboží. Časté je zpoždění na straně nabídky (typicky např. u zemědělských produktů), kdy zpoždění je dáno samotnou dobou výroby (vypěstování) zboží, neuvažujeme-li existenci zásob. Diskrétní pavučinové modely uvažují zpoždění nezanedbatelně malé a formování rovnováhy je popsáno soustavou diferenčních rovnic. Je možné formulovat podmínku pro dosažení rovnováhy v diskrétním pavučinovém modelu se zpožděním na straně nabídky nebo poptávky – tato souvisí se sklonem křivek nabídky a poptávky v bodě statické rovnováhy. Ve spojitém modelu se zpožděním na straně nabídky popsaném soustavou diferenciálních rovnic je za předpokladu lineárních funkcí nabídky a poptávky dosažení rovnováhy zaručeno vždy.

Otázky k zamyšlení

- Jakou roli hraje v procesu dosahování tržní rovnováhy zpoždění? Jak jej můžeme zohlednit v jednoduchých tržních modelech?
- Zkuste najít nějaké příklady dílčích trhů, kde se zpoždění často vyskytuje nebo kde bychom jeho existenci mohli předpokládat. Čím je zpoždění reakce jedné ze stran trhu (nabídky/poptávky) způsobeno? Co jsou předpoklady pro existenci tohoto zpoždění, co jsou jeho důsledky, a jak by bylo možné zpoždění eliminovat nebo zmírnit (na konkrétním příkladu)?
- Proč výše uvedené pavučinové modely (tj. modely oscilací při dosahování tržní rovnováhy) mají předpoklad neexistence zásob? Jakou roli hrají zásoby při tvorbě nebo zmírňování uvedených oscilací?
- Co vlastně udává sklon křivek nabídky a poptávky a jak byste vysvětlili, že právě sklon těchto křivek učuje (ne)dosažitelnost rovnovážného stavu na zvoleném dílčím trhu? Najděte praktický příklad dílčího trhu, kde byste efekt sklonu poptávkové a nabídkové křivky na dosažitelnost rovnovážného stavu uměli jasně vysvětlit.
- V této kapitole jsme se věnovali diskrétním modelům, kde jsme předpokládali, že zpoždění je dáno např. v zemědělství dobou nutnou k vypěstování nových plodin, tj. např. 1 rok. Najdete příklady dílčích trhů, kde by zpoždění bylo větší než nekonečně malé, ale bylo by např. v řádu dnů, měsíců, ale i třeba několika

let? Jaké možné zdroje zpoždění na straně poptávky vás napadají? S čím tato zpoždění souvisí a jak je možné je ovlivnit?

Další zdroje informací

Baldani, J., Bradfield, J., Turner, R. W. (2005) *Mathematical economics*. Thomson South-Western, 2. vydání. ISBN 0324183321.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie I*. VŠB-TU, Ostrava.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie II*. VŠB-TU, Ostrava.

Hands, D. W. (2004) *Introductory mathematical economics*. Oxford University Press, 2. vydání. ISBN 0195133781.

Soper, J. (2004) *Mathematics for economics and business: an interactive introduction.* Wiley-Blackwell, 2. vydání. ISBN 1405111275.

Kapitola 5
Teorie spotřebitele

Cíle
Prostudování této kapitoly umožní čtenáři:

- porozumět rozdílu mezi pojmy spotřeba a poptávka,
- pochopit roli dvou základních otázek teorie spotřebitele – tj. jak si opatřit důchod a jak jej vynaložit na nákup statků ve spotřebě,
- porozumět základním axiomům teorie spotřebitele a jejich významu pro popis preferenční relace spotřebitele,
- chápat pojem racionality spotřebitele jako základní podmínku určující charakter spotřeby a tím i poptávky, hrající významnou roli při hledání optima spotřebitele,
- chápat rozdíl mezi kardinalistickou a ordinalistickou teorií užitku,
- pochopit základní vlastnosti indiferenčních křivek, jejich souvislost s axiomy teorie spotřebitele a jejich použití (a případná úskalí) při hledání optima spotřebitele.

5.1 Úvod

Abychom mohli proniknout hlouběji do analýzy trhu a pochopit všechny potřebné souvislosti, je potřeba zaměřit se blíže jak na nabídku, tak i na poptávku. V této kapitole si proto představíme základní východiska teorie spotřebitele, z nichž se pak odvíjí nalézání optima spotřebitele a následně pak konstrukce individuální poptávkové křivky. Pozornost bude věnována především racionalitě spotřebitele, její souvislosti s rozhodováním spotřebitele a s užitkovou funkcí. Připomeneme si také základní pojmy teorie užitku a indiferenční analýzy. To vše s cílem pochopit, jakou informaci nese individuální poptávková křivka, jak souvisí s optimalizací chování spotřebitele a s omezeními rozhodování spotřebitele (např. rozpočtovým omezením).

Obecně bychom cíl našeho snažení v této i následujících kapitolách mohli definovat jako hledání řešení dvou základních problémů:

I. Optimalizace chování spotřebitele (můžeme na ni pohlížet jako na maximalizaci užitku při respektování některých omezení).
II. Hledání rovnováhy na trhu (zejména mezi spotřebiteli a výrobci).

Nemá valný smysl řešit tyto problémy odděleně. Pouze řešení, které je optimální pro spotřebitele a zároveň realizuje rovnovážný stav na trhu, můžeme považovat za přijatelné. Později si také ukážeme, že s optimem spotřebitelů by mělo být také svázáno optimum výrobců – hledání globální rovnováhy je provázáno s hledáním udržitelného optima výrobců i spotřebitelů. Začněme vymezením základních pojmů:

Spotřebu můžeme definovat jako vynakládání příjmu (domácnostmi, firmami nebo státním sektorem) na nákup jednotlivých výrobků a služeb, a to ne za účelem další výroby. Je třeba si uvědomit, že nejde nutně o konzumaci, tj. že spotřeba neznamená „likvidaci", ale pouhé odstranění daného výrobku z trhu (tj. výrobek/statek může dále existovat a může přinášet svému majiteli užitek). Podstatné je vymezit spotřebu a investice. Dělicí čáru si pro účely tohoto textu stanovíme tak, že spotřeba je jednorázový akt (a jako takový souvisí s uspokojením aktuálních potřeb), kdežto investice jsou činěny za účelem rozvoje a potenciálního zvýšení zisku (tedy jejich vliv se předpokládá v budoucnosti).

Se spotřebou úzce souvisí také následující pojmy:

Poptávka popisuje souvislost mezi cenou daného statku a jeho poptávaným množstvím. Poptávka přitom nutně souvisí se spotřební funkcí (měli bychom respektovat rozpočtové omezení a tedy disponibilní úroveň důchodu; musíme být schopni pokrýt spotřebu těch statků, které uspokojují naše základní potřeby – tj. statků nezbytných atd.).

Spotřební funkce v makroekonomických modelech popisuje vztah mezi důchodem spotřebitele a objemem jeho spotřeby. Bývá zaváděna například v následujícím tvaru

$$C = C_a + b \cdot Y_d, \tag{5.1}$$

kde C je spotřeba (objem spotřeby daného spotřebitele vyjádřený v peněžních jednotkách), C_a je autonomní spotřeba (tj. spotřeba nezávislá na výši důchodu, kterou je nutné tak jako tak realizovat), b popisuje mezní sklon ke spotřebě a Y_d popisuje disponibilní důchod daného spotřebitele. Disponibilní důchod je důchod, od nějž jsou odečteny přímé daně, což při daňové sazbě t můžeme vyjádřit $Y_d = (1-t) \cdot Y$. Obecně můžeme tedy spotřební funkci uvažovat jako funkci tří proměnných ve tvaru

$$C = f(Y, t, b). \tag{5.2}$$

Užitek popisuje pro konkrétního spotřebitele „přínos", jaký mu daný statek (jeho konkrétní spotřebovávané množství) přináší. Je zřejmé, že jeho měření bude obtížné a může vyžadovat také zapojení kvalitativních metod. Jde totiž o subjektivně vnímaný přínos. Obecně je možné užitek vyjádřit bez jednotek čistě numericky (případně uvažovat abstraktní jednotku „util", která je ekvivalentem vnímaného přínosu spotřeby jedné jednotky předem specifikovaného statku), nebo např. ve finančních či časových jednotkách (je to sice méně časté, ale ekonomie v mnoha případech využívá finanční a časové jednotky pro vyjádření hodnoty, je tedy teoreticky možné tento přístup aplikovat i na užitek). Více se užitkem budeme zabývat dále.

5.2 Předpoklady teorie spotřebitele

Než se pustíme do analýzy spotřebních a užitkových funkcí spotřebitelů, uvedeme si obvyklá ekonomická východiska této oblasti zájmu ekonomie. Na trh nyní nahlížíme z pohledu spotřebitele a předpokládáme, že **každý spotřebitel řeší dvě základní otázky**:

1. Jak získat důchod?
2. Jak rozdělit/vynaložit důchod na nákup statků?

Z analytického hlediska pak z pohledu teorie spotřebitele musíme zároveň řešit dva problémy:

1. Optimalizace chování spotřebitele – jde o to, aby spotřebitel vynakládal svůj důchod na spotřebu co nejlépe, tedy aby maximalizoval hodnotu nějakého kritéria, nejčastěji užitku. K tomuto nám slouží funkce užitku (a s ní související teorie užitku), matematické nástroje pro hledání extrémů funkcí (vázaných extrémů), případně nástroje Paretovské analýzy atd.
2. Otázka rovnováhy na trhu (rovnováha spotřebitelé vs. výrobci).

Oba výše uvedené problémy bychom přitom měli řešit zároveň (možný způsob si naznačíme v kapitole o welfare economics). Obecně je v modelech potřeba provázat nejen nabídku a poptávku, ale také zohlednit, že spotřebitelé musí mít na spotřebu důchod, výrobci musí mít potřebné vstupy pro výrobu atd. Často tedy hledáme takové řešení, které je jednak přípustné (tj. je možné jej při daných zdrojích v ekonomice realizovat) a jednak rovnovážné (neexistuje tlak na změnu) – s tím také souvisí to, že je optimální pro výrobce i spotřebitele (neboť kdyby optimální nebylo, tlak na změnu by existoval).

Zásadním ekonomickým předpokladem z pohledu teorie spotřebitele je, že spotřebitelé se chovají racionálně. Definic racionality je mnoho, přičemž na zvolené definici racionality pak závisí, jak vypadá optimální rozhodnutí, jak vypadá poptávková a užitková funkce atd. V tomto textu se budeme držet následující definice racionality, která je často v literatuře formulována následujícím způsobem:

- Racionální spotřebitel se rozhoduje na základě nějakých jím stanovených kritérií (tj. nejedná náhodně).
- Racionální spotřebitel se snaží maximalizovat svůj užitek (je samozřejmě možné, že používá jiné kritérium, jehož hodnotu chce optimalizovat, nejčastěji je však v kontextu teorie spotřebitele zmiňován právě užitek) .
- Spotřebitele v rozhodování omezuje jeho důchod. Racionální spotřebitel si tuto skutečnost uvědomuje, respektuje ji a jedná podle toho.

Dále uvažujeme, že spotřebitel vybírá z mnoha souborů statků (spotřebních košů) ten, který je tímto spotřebitelem nejvíce preferován (tj. přináší mu nejvyšší užitek) a přitom si jej může dovolit koupit. Jinak řečeno, spotřebitel hledá mezi dostupnými spotřebními koši, které si je za svůj důchod schopen pořídit, takový spotřební koš, který by jeho užitek maximalizoval – v tomto smyslu se své spotřební chování snaží optimalizovat. Aby spotřebitel mohl srovnávat spotřební koše a vybírat ten, který je z jeho pohledu více preferovaný, musí na množině spotřebních košů existovat preferenční relace. Preference spotřebitele musí být v souladu s následujícími čtyřmi axiomy (axiomy 3 a 4 nejsou vyžadovány vždy):

1. **Axiom úplnosti srovnání** – umíme porovnat každé dva spotřební koše a výsledkem je, že buď preferujeme jeden z nich, nebo jsou indiferentní. Pro spotřební koše A a B musí být rozhodovatel schopen vybrat vždy právě jednu z možností:
   - $A \succ B$, tedy A je preferován před B,
   - $A \prec B$, tedy B je preferován před A,
   - $A \approx B$, spotřební koše A a B jsou z pohledu rozhodovatele stejně hodnocené, rozhodovatel/spotřebitel je vůči nim indiferentní.
2. **Axiom tranzitivity**, který je nejčastěji uváděn v následující podobě, kdy pro každé tři spotřební koše A, B a C platí:

$$[(A \succ B) \wedge (B \succ C)] \Rightarrow (A \succ C)\,, \tag{5.3}$$

   nicméně lze také požadovat, aby např.:

$$[(A \succ B) \wedge (B \approx C)] \Rightarrow (A \succ C)\,, \tag{5.4}$$

$$[(A \approx B) \wedge (B \succ C)] \Rightarrow (A \succ C)\,, \tag{5.5}$$

$$[(A \approx B) \wedge (B \approx C)] \Rightarrow (A \approx C)\,, \tag{5.6}$$

$$[(A \prec B) \wedge (B \prec C)] \Rightarrow (A \prec C)\,, \tag{5.7}$$

$$[(A \prec B) \wedge (B \approx C)] \Rightarrow (A \prec C)\,, \tag{5.8}$$

$$[(A \approx B) \wedge (B \prec C)] \Rightarrow (A \prec C)\,. \tag{5.9}$$

3. **Axiom nenasycenosti** – větší množství statku je vždy preferováno před menším (jen pro úplnost zde poznamenejme, že axiom nenasycenosti v podstatě neumožňuje záporný mezní užitek).
4. **Neměnnost preferencí spotřebitele v čase**.

Je však otázkou, jestli výše uvedené axiomy nejsou příliš omezující a jestli jsou v reálných situacích vždy dodržovány.

5.3 Teorie užitku

Užitek (U) je v ekonomii často používaná univerzální veličina, která v teorii spotřebitele hraje roli univerzálního kritéria. Užitek souvisí s preferencemi – minimálně v tom smyslu, že to, co přináší větší užitek, by mělo být preferováno před tím, co přináší užitek menší – z tohoto pohledu můžeme tedy užitek chápat jako ukazatel směru preferencí. Jedná se o veličinu, která v jistém smyslu popisuje něco jako „atraktivitu“ spotřeby daného statku (spotřebního koše) pro konkrétního spotřebitele. Je tedy smysluplné očekávat, že jestliže nám přináší varianta A větší užitek než varianta B, pak bude varianta A preferována před variantou B. Nejspíš vás napadne, že takto zavedenou veličinu bude asi velice obtížné měřit, a ani ekonomové v přístupu k užitku nejsou úplně jednotní. Existují dva základní přístupy v rámci teorie užitku:

Kardinalistický – kardinalistická teorie užitku předpokládá, že *užitek je měřitelný* (důsledkem čehož by měla existovat jednotka užitku, např. „1 util“). V rámci kardinalistického pojetí užitku je možné nalézt a analyticky zapsat funkci užitku a optimalizaci užitku je tedy možné realizovat s využitím nástrojů matematické analýzy (hledání volných a vázaných extrémů funkce).

Ordinalistický – ordinalistická teorie užitku považuje užitek za *neměřitelný*. Ordinalisté však připouštějí, že ačkoliv člověk není schopen užitek vyčíslit, je stále schopen říci, která ze dvou variant mu přináší větší užitek (popř. že obě přináší užitek stejný). Ordinalistická teorie využívá k popisu užitku daného spotřebitele indiferenčních křivek, o nichž se zmíníme dále v textu. Obecný analytický předpis užitkové funkce však není k dispozici.

Ať už se přikloníme na kteroukoliv stranu, měli bychom být schopni vymezit, na čem užitek závisí, tj. které faktory jej ovlivňují a určují. Zřejmě se shodneme, že užitek daného spotřebitele obecně závisí na:

- $q_1, q_2, \ldots, q_k$, kde q_i popisuje množství statku X_i spotřebovávané daným spotřebitelem, $i = 1, \ldots, k$
- $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_m$, kde y_j popisuje příjem (důchod) daného spotřebitele z j-tého zdroje příjmu, $j = k+1, \ldots, m$
- $o_{m+1}, o_{m+2}, \ldots, o_n$, tj. dalších možných interferujících faktorech (tradice, kultura, zdravotní stav, zájmy, ...).

Obecně pak můžeme užitek zapsat jako funkci všech těchto faktorů:

$$U = f(q_1, q_2, \ldots, q_k, y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_m, o_{m+1}, o_{m+2}, \ldots, o_n). \tag{5.10}$$

5.3.1 *Kardinalistická teorie užitku*

Podle kardinalistické teorie užitku je užitek měřitelný. Existuje tedy jeho jednotka (např. 1 util) a dokážeme sestrojit funkci celkového užitku TU, kterou můžeme zjednodušeně zapsat jako:

$$TU = f(q_1, q_2, \ldots, q_k, y), \tag{5.11}$$

kde všechny symboly mají význam stejný jako v (5.10), a uvažujeme jediný zdroj příjmu. Zjednodušená formulace (5.11) tedy předpokládá, že užitek je závislý čistě na množství jednotlivých spotřebovávaných statků a na celkovém disponibilním důchodu; ostatní vlivy jsou zanedbány (předpokládáme, že se nemění kultura, zájmy, potřeby atd.) a nepovažujeme za podstatné ani to, odkud pochází příjem spotřebitele.

Skutečnost, že máme k dispozici funkci užitku, nám umožňuje zkonstruovat pro účely analýzy chování spotřebitele také funkci mezního užitku MU. Abychom byli přesní, v obecném případě (5.11) máme ve skutečnosti $k+1$ funkcí mezního užitku:

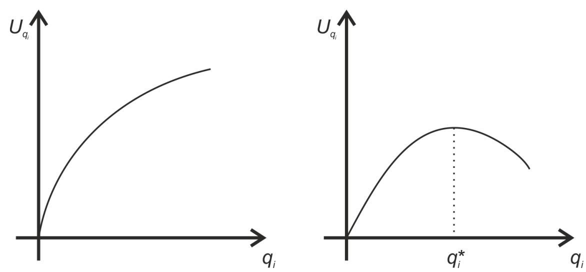
$$MU_{q_i} = \frac{\partial TU}{\partial q_i}, \text{ kde } i = 1, \ldots, k \tag{5.12}$$

a

$$MU_y = \frac{\partial TU}{\partial y}. \tag{5.13}$$

Jelikož známe funkci TU, můžeme v případě nutnosti k nalezení kombinace spotřebovávaných množství jednotlivých statků $q_1^*, q_2^*, \ldots, q_k^*$ maximalizujících užitek spotřebitele při daném důchodu y využívat metod podmíněné optimalizace. Možná je dobré na tomto místě připomenout, že budeme-li uvažovat rozpočtové omezení spotřebitele (tj. v tomto případě jeho důchod), pak nám do hledání optima (přesněji do podmínek vymezujících oblast spotřebních košů, které si za daný důchod může koupit) vstupují jako proměnné také ceny jednotlivých statků, z nichž jsou spotřební koše složeny. Cena daného statku je daná rovnováhou mezi nabídkou a poptávkou na trhu s daným statkem. Nicméně z matematického pohledu můžeme tuto problematiku redukovat na úlohu nalezení vázaného extrému funkce více proměnných (kterou můžeme řešit např. Lagrangeovou metodou).

Obrázek 5.1 Příklad dílčí funkce užitku U_{q_i} závislé jen na množství q_i spotřebovávaného statku X_i. Vlevo za platnosti axiomu nenasycení (U_{q_i} je konkávní a rostoucí), vpravo neplatí axiom nenasycení - v bodě q_i^* nastává nasycení a od tohoto bodu dále funkce U_{q_i} klesá.



Ekonomové často předpokládají platnost **zákona klesajícího mezního užitku**. Ten říká, že s každou další spotřebovávanou jednotkou statku roste užitek stále pomaleji (tj. jeho přírůstky se stále zmenšují). V řeči celkového a mezního užitku (pro zjednodušení uvažujme pro ilustraci dílčí funkce užitku jednotlivých statků $U_i = f(q_i)$, které jsou dvakrát spojitě diferencovatelné) můžeme psát, že *za plat-*

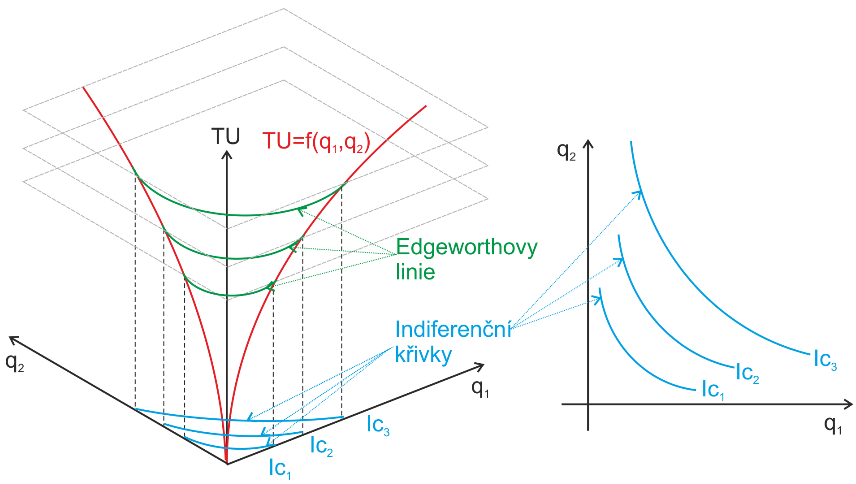
nosti axiomu nenasycení platí:

$$MU_{q_i} = \frac{dU_{q_i}}{dq_i} > 0, \tag{5.14}$$

tj. funkce mezního užitku roste (každá další spotřebovaná jednotka navyšuje celkový užitek), a zároveň

$$\frac{d^2U_{q_i}}{dq_i^2} = \frac{dMU_{q_i}}{dq_i} < 0, \tag{5.15}$$

tedy mezní užitek klesá. Příklad užitkové funkce, která vyhovuje (5.14) a (5.15), tj. která je v souladu s axiomem nenasycení, je na obrázku 5.1 vlevo. V případě, že by *axiom nenasycení splněn nebyl* a že bychom tedy připustěli situaci, kdy s rostoucím množstvím spotřebovávaného množství daného statku užitek od jistého bodu dále klesá (např. situace otravy jídlem, předávkování prášky proti bolesti ...), redukuje se podmínka popisující zákon klesajícího mezního užitku pouze na (5.15). Jinak řečeno, při neplatnosti axiomu nenasycení nemusí platit (5.14). Příklad funkce užitku, pro kterou neplatí axiom nenasycení, můžeme nalézt na obrázku 5.1 vpravo.



Obrázek 5.2 Souvislost funkce užitku $TU = f(q_1, q_2)$ (červená), Edgeworthových linií (zelená) a indiferenčních křivek (modrá). Indiferenční křivky jsou průměty Edgeworthových linií (vrstevnic funkce užitku) do roviny (q_1, q_2). Index indiferenční křivky v tomto případě může odpovídat hodnotě užitku, který libovolný bod této křivky přináší danému spotřebiteli.

Uvažujeme-li závislost užitku na množství dvou spotřebovávaných statků (za neměnného důchodu), pak můžeme $TU = f(q_1, q_2)$ vyjádřit jako plochu nad rovinou q_1, q_2. Pokud provedeme řez funkce TU rovinou rovnoběžnou s rovinou (q_1, q_2), získáme následující množinu bodů v prostoru:

$$\left\{(q_1,q_2,f(q_1,q_2))\in\mathbb{R}^3|TU=f(q_1,q_2)=u\right\}, \tag{5.16}$$

kde u je konkrétní úroveň užitku. Vztah (5.16) popisuje vrstevnice grafu funkce TU ve výšce u – tzv. Edgeworthovy linie (obrázek 5.2). Průmětem Edgeworthových linií do roviny (q_1,q_2) pak získáme tzv. indiferenční křivky (IC), které spojují vždy všechny kombinace spotřebovávaného množství statků X_1 a X_2, z nichž má spotřebitel stejný užitek u, jinými slovy pro každé $u\in\langle 0,\infty)$ dostáváme

$$IC_u=\left\{(q_1,q_2)\in\mathbb{R}^2|TU=f(q_1,q_2)=u\right\}. \tag{5.17}$$

Je dobré si uvědomit, že indiferenční křivky v principu nejsou v kardinalistické teorii užitku potřeba (i bez nich při znalosti funkce TU dokážeme najít optimum spotřebitele). V případě funkce utility ve tvaru (5.11) je optimum spotřebitele hledáno jako řešení následující úlohy:

$$f(q_1,q_2,\ldots,q_k)\ \to \text{max};\ \text{ za podmínky }\ q_1\cdot p_{X_1}+\cdots+q_k\cdot p_{X_k}\leq y. \tag{5.18}$$

Indiferenční křivky nám také, podobně jako comparative statics funkce, umožňují zobrazit trojrozměrnou funkci užitku ve dvou rozměrech jako na obrázku 5.2. Poskytují tak v kardinalistické teorii užitku nástroj pro snazší grafickou reprezentaci vícerozměrných užitkových funkcí.

Jelikož jsou indiferenční křivky dobrým znázorněním preferencí spotřebitele i v případě, kdy není schopen popsat funkci užitku, jsou IC jedním z klíčových pojmů ordinalistické teorie užitku. V ordinalistické teorii užitku už ale neplatí, že *IC* jsou konstruovány jako průměty vrstevnic funkce užitku, jelikož funkce užitku není známa. Namísto toho jsou indiferenční křivky konstruovány na principu indiference a kompenzační analýzy. Proto indexy indiferenčních křivek v ordinalistické teorii užitku neodráží hodnotu užitku, ale nesou jen ordinální informaci – tj. platí, že *IC* s vyšším indexem odpovídá kombinacím statků, které přináší vyšší (ale číselně neznámý) užitek než kombinace statků na *IC* s nižším indexem.

5.3.2 Ordinalistická teorie užitku

Předpoklad, že užitek je měřitelný, se ukazuje jako velice silný (a matematická teorie kardinalistické funkce utility je propracována relativně detailně). Mnohdy však spotřebitelé nejsou schopni vyčíslit, jaký užitek jim nějaký statek nebo spotřební koš přináší. Problém není jenom v samotném vyčíslení, ale také v jednotce. Uvažujeme-li v „utilech“, pak bychom měli tomuto pojmu dát jasný význam, abychom po spotřebiteli mohli požadovat vyčíslení užitku (zvolíme-li za jednotku něco, co známe — např. „užitek z 1 rohlíku“, pak na potraviny nám to snad stačit může. Ale kolik rohlíků nám dává stejný užitek jako nový automobil nebo zahraniční dovolená?). Jestliže nebudeme trvat na odvození funkce užitku, ale bude nám stačit, když spotřebitelé budou pro každé dva statky (spotřební koše) A a B schopni rozhodnout, jestli

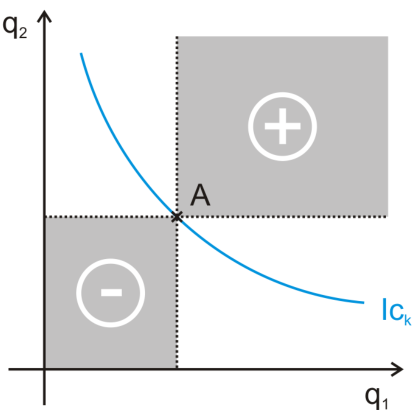
- větší užitek přináší A,
- větší užitek přináší B, nebo
- A i B přináší stejný užitek,

pak se ocitáme na půdě ordinalistické teorie utility. Právě ordinalistický přístup je v současné době v ekonomii nejrozšířenější. Spotřebitel musí umět zadat funkci užitku, předpokládáme však, že je schopen říci, jaké spotřební koše mu přinášejí stejný užitek jako koš A. Všechny takovéto spotřební koše pak leží na téže indiferenční křivce (pro případ dvou spotřebovávaných statků, jemuž se budeme i nadále věnovat). Narozdíl od indiferenčních křivek definovaných jako (5.17) však musíme v ordinalistické teorii vymezit indiferenční křivku bez znalosti konkrétní hodnoty užitku, které odpovídá, tedy

$$IC = \left\{(q_1, q_2) \in \mathbb{R}^2 | TU = f(q_1, q_2) = konst.\right\}. \tag{5.19}$$

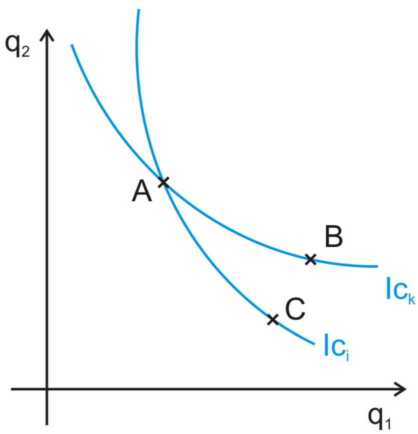
Budeme-li indiferenční křivky v ordinalistické teorii utility opatřovat indexy, pak pro každá dvě přirozená čísla a a b platí, že jestliže $a < b$ pak IC_a popisuje kombinace spotřebovávaného množství statků (q_1, q_2), které spotřebiteli přinášejí menší užitek než kombinace tvořící IC_b. Jinak řečeno, kombinace množství statků odpovídající vyšší indiferenční křivce (indifereční křivce s vyšším indexem) přináší také vyšší užitek (a měly by tedy být preferovány). Soubor všech indiferenčních křivek (v rovině (q_1, q_2)) pak nazýváme **indiferenční mapou** (viz obrázek 5.2 vpravo). Je možné odvodit, že indiferenční křivky musí mít za daných podmínek následující vlastnosti:

1. *IC* **jsou klesající** – jde o důsledek axiomu nenasycení (viz obrázek 5.3). Na obrázku je symbolem (+) označena oblast, v níž na základě axiomu nenasycení leží spotřební koše (tj. kombinace q_1 a q_2) takové, které jsou preferovány před spotřebním košem A. Obdobně spotřební koš A je na základě axiomu nenasycení preferován před všemi spotřebními koši ležícími v oblasti označené $(-)$. Indiferenční křivka, na níž leží bod A, tedy nemůže procházet ani oblastí $(+)$, ani oblastí $(-)$. Z toho pak vyplývá, že indiferenční křivky musí být klesající.



Obrázek 5.3 Indiferenční křivky jsou klesající – souvislost s axiomem nenasycení. Vzhledem k bodu *A* jsou za platnosti axiomu nenasycení všechny body v oblasti (+) preferovány, a musí tedy ležet na vyšší indiferenční křivce. Analogicky všechny body v oblasti (-) jsou méně preferovány a leží na nižší indiferenční křivce. Všechny monotónní *IC* procházející bodem *A* mimo šedé oblasti musí být klesající.

2. *IC* **se neprotínají** – důsledek axiomu tranzitivity. Jak je znázorněno na obrázku 5.4, pokud by se indiferenční křivky protínaly, pak by existovaly body A, B a C, pro něž by platilo to, co je uvedeno v popisu obrázku 5.4, což odporuje axiomu tranzitivity. Indiferenční křivky se tedy za platnosti axiomu tranzitivity protínat nemohou.



Obrázek 5.4 Indiferenční křivky se neprotínají – souvislost s axiomem tranzitivity. Kdyby platilo to, co je vyobrazeno, pak $(B \approx A) \wedge (A \approx C)$, z čehož by podle axiomu tranzitivity (5.6) muselo plynout, že $B \approx C$. Z obrázku je ale patrné, že $B \not\approx C$, jelikož leží na jiných indiferenčních křivkách. Má-li platit axiom tranzitivity, indiferenční křivky se nemohou protínat.

3. **Každým bodem indiferenční mapy prochází nějaká** *IC* – důsledek axiomu úplnosti srovnání.
4. *IC* **jsou konvexní vzhledem k počátku** – nejde o důsledek žádného z axiomů teorie spotřebitele. Tento požadavek popisuje racionalitu chování spotřebitele v tom smyslu, že „čím méně spotřebitel má statku X_1, tím větší množství statku X_2 je ochoten obětovat za dodatečnou jednotku statku X_1, a naopak."

Indiferenční křivky v sobě nesou navíc informaci o tom, v jakém poměru je spotřebitel ochoten nahrazovat jeden statek druhým za předpokladu konstantního užitku. Bavíme-li se o změnách spotřebovávaného množství statků X_1 a X_2, tedy o změnách hodnot q_1 a q_2, pak skutečnost, že spotřebitel nahrazuje ve spotřebě jeden statek druhým tak, aby se nezměnil jeho užitek, můžeme zapsat následující podmínkou (s využitím totálního diferenciálu užitku U):

$$dTU = \frac{\partial TU}{\partial q_1} \cdot dq_1 + \frac{\partial TU}{\partial q_2} \cdot dq_2 = 0, \tag{5.20}$$

odkud jednoduchou úpravou dostáváme, že aby nedošlo ke změně celkového užitku, musí platit:

$$\frac{\frac{\partial TU}{\partial q_1}}{\frac{\partial TU}{\partial q_2}} = \frac{MU_{q_1}}{MU_{q_2}} = -\frac{dq_2}{dq_1}. \tag{5.21}$$

Vzájemný poměr, ve kterém nahrazuje spotřebitel jeden statek druhým při zachování stejného užitku, je tedy závislý na poměru mezních užitků jednotlivých statků. Tuto veličinu nazýváme **mezní mírou substituce ve spotřebě** (MRS_C – z anglického Marginal Rate of Substitution in Consumption) a můžeme psát:

$$MRS_C = -\left.\frac{dq_2}{dq_1}\right|_{TU=konst.} = \frac{MU_{q_1}}{MU_{q_2}}. \tag{5.22}$$

Je tedy zřejmé, že mezní míru substituce ve spotřebě můžeme graficky reprezentovat tangentou úhlu, který svírá tečna k indiferenční křivce s osou q_1, pak je jen potřeba zohlednit záporné znaménko dle (5.22). Je možné uvažovat také alternativní odvození vztahu (5.22), které vychází také z myšlenky, že změna užitku (např. pokles) vyvolaná změnou spotřebovávaného množství statku X_1 musí být vykompenzována nárůstem užitku vyvolaným nárůstem spotřebovávaného množství statku X_2. Totéž je možné zapsat symbolicky pomocí změn q_1 a q_2 a hodnot mezních užitků:

$$\Delta q_1 \cdot MU_{q_1} = -\Delta q_2 \cdot MU_{q_2},$$

odkud snadno dostáváme vztah (5.22):

$$\frac{MU_{q_1}}{MU_{q_2}} = -\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = MRS_C.$$

Zavést můžeme také **elasticitu substituce** (ozn. σ), která popisuje, jak velkou relativní změnu poměru spotřebovávaného množství statků X_1 a X_2 vyvolá změna MRS_C o jedno procento:

$$\sigma = \frac{\frac{d(q_2/q_1)}{(q_2/q_1)}}{\frac{dMRS_C}{MRS_C}}. \tag{5.23}$$

Čím vyšší je σ, tím snadněji jsou statky nahraditelné; pro dokonalé substituty proto máme $\sigma \to \infty$ a pro dokonalé komplementy $\sigma = 0$.

5.4 Rozhodování spotřebitele – maximalizace užitku

Chceme-li zohlednit také rozpočtové omezení, pak uvažujeme-li jen dva statky X_1 a X_2, a chceme-li dosáhnout maximalizace užitku daného spotřebitele (za předpokladu platnosti axiomu nenasycení), není obtížné nahlédnout, že musí platit

$$y = p_{X_1} \cdot q_1 + p_{X_2} \cdot q_2, \tag{5.24}$$

tedy spotřebitel musí celý svůj důchod vynakládat na spotřebu (předpokládáme navíc typický tvar funkce užitku, tj. oba statky z kategorie „goods“ neboli žádoucích statků). Jestliže spotřebitel rozděluje celý svůj důchod mezi dva statky, pak je snadné vyjádřit, jak se změní spotřeba jednoho ze statků jako důsledek změny spotřeby statku druhého při neměnném důchodu. Zjevně musí platit, že

$$y = p_{X_1} \cdot (q_1 + \Delta q_1) + p_{X_2} \cdot (q_2 + \Delta q_2), \tag{5.25}$$

kde $\Delta q_1 \cdot \Delta q_2 < 0$, jinými slovy nárůst spotřebovávaného množství statku X_1 vyvolá pokles spotřebovávaného množství statku X_2, a naopak pokles vyvolá nárůst. Protože jak (5.24), tak i (5.25) popisují rozdělení důchodu y, můžeme porovnat pravé strany těchto rovnic a dostáváme:

$$y = p_{X_1} \cdot q_1 + p_{X_2} \cdot q_2 = p_{X_1} \cdot (q_1 + \Delta q_1) + p_{X_2} \cdot (q_2 + \Delta q_2), \tag{5.26}$$

a odtud

$$p_{X_1} \cdot (q_1 - q_1 - \Delta q_1) = p_{X_2} \cdot (q_2 + \Delta q_2 - q_2), \tag{5.27}$$

tedy

$$-\Delta q_1 \cdot p_{X_1} = \Delta q_2 \cdot p_{X_2} \tag{5.28}$$

a konečně

$$\frac{p_{X_1}}{p_{X_2}} = -\frac{\Delta q_2}{\Delta q_1} = MRS_E. \tag{5.29}$$

Výraz (5.29) definuje **mezní míru substituce ve směně** (ozn. MRS_E z anglického Marginal Rate of Substitution in Exchange). MRS_E popisuje změnu spotřebovávaného množství statku X_2 vyvolanou změnou spotřebovávaného množství statku X_1 za předpokladu, že mezi spotřebu těchto dvou statků musí být rozdělen celý důchod, jehož výše se nemění. Grafickou reprezentací MRS_E je tedy směrnice tečny rozpočtové linie BL (z anglického Budget Line) daného spotřebitele, kde rozpočtová linie popisuje všechny kombinace q_1 a q_2 takové, že $y = p_{X_1} \cdot q_1 + p_{X_2} \cdot q_2$. V případě lineární rozpočtové linie pak MRS_E udává sklon rozpočtové linie.

Úlohu maximalizace užitku spotřebitele bychom tedy mohli formálně zapsat v následujícím tvaru[1]:

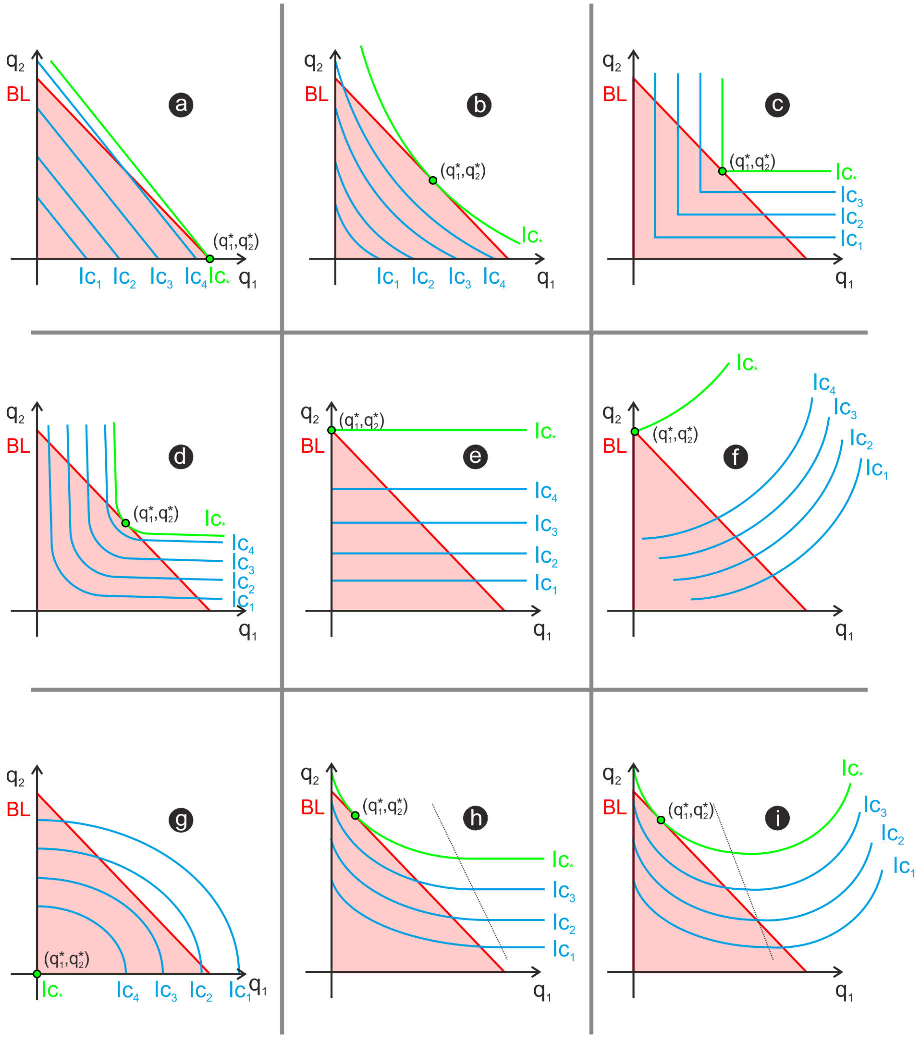
$$\begin{aligned} TU(q_1, q_2) &\to \max \\ &\text{za podmínek} \\ q_1 \cdot p_{X_1} + q_2 \cdot p_{X_2} &\leq y \\ q_1, q_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Jde tedy o formulaci, která je v principu *kardinalistická*, protože předpokládá znalost funkce užitku. Tuto úlohu můžeme analyticky řešit Lagrangeovou metodou, tedy hledáním extrému Lagrangeovy funkce:

[1] Pro n statků je optimalizační úloha v následujícím tvaru:

$$\begin{aligned} TU(q_1, q_2, \ldots, q_n) &\to \max \\ &\text{za podmínek} \\ \sum_{i=1}^{n} q_i \cdot p_{X_i} &\leq y \\ q_1, q_2, \ldots, q_n &\geq 0 \end{aligned}$$

a řeší se analogicky.



Obrázek 5.5 Optima spotřebitele (q_1^*, q_2^*) pro různé užitkové funkce reprezentované indiferenčními mapami z Obrázku 5.6 při tomtéž rozpočtovém omezení. Všechny podgrafy tedy pracují se stejným důchodem y a stejnými cenami statků X_1 a X_2, tj. p_{X_1} a p_{X_2}. Růžové oblasti ve tvaru trojúhelníku reprezentují soubor tržních příležitostí - tj. množinu všech kombinací statků X_1 a X_2 které si spotřebitel při důchodu y může dovolit, tj. množinu $\{(q_1, q_2) | p_{X_1} \cdot q_1 + p_{X_2} \cdot q_2 \leq y,\ q_1, q_2 \geq 0\}$.

$$L(q_1, q_2, \lambda) = TU(q_1, q_2) + \lambda \cdot \left(y - \sum_{i=1}^{2} q_i \cdot p_{X_i} \right), \tag{5.30}$$

který jako každý extrém funkce musí splňovat následující podmínky:

$$\frac{\partial L}{\partial q_1} = \frac{\partial TU}{\partial q_1} + \frac{d\left(\lambda \cdot y - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{2} q_i \cdot p_{X_i}\right)}{\partial q_1} = MU_{q_1} - \lambda \cdot p_{X_1} = 0, \tag{5.31}$$

$$\frac{\partial L}{\partial q_2} = \frac{\partial TU}{\partial q_2} + \frac{d\left(\lambda \cdot y - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{2} q_i \cdot p_{X_i}\right)}{\partial q_2} = MU_{q_2} - \lambda \cdot p_{X_2} = 0, \tag{5.32}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = \frac{\partial TU}{\partial \lambda} + \frac{d\left(\lambda \cdot y - \lambda \cdot \sum_{i=1}^{2} q_i \cdot p_{X_i}\right)}{\partial \lambda} = 0 + y - \sum_{i=1}^{2} q_i \cdot p_{X_i} = 0. \tag{5.33}$$

Z (5.31) dostáváme

$$\frac{MU_{q_1}}{p_{X_1}} = \lambda, \tag{5.34}$$

z (5.32) dostáváme

$$\frac{MU_{q_2}}{p_{X_2}} = \lambda. \tag{5.35}$$

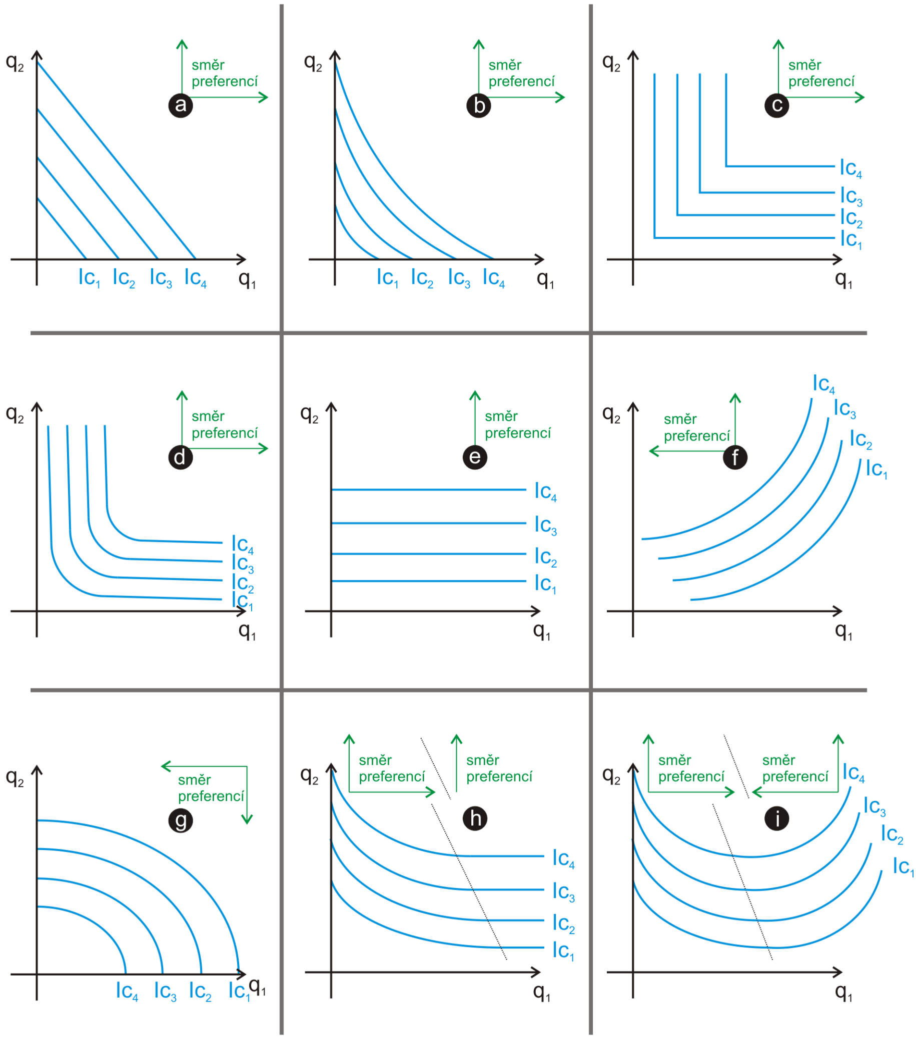
I když zatím neznáme extrém Lagrangeovy funkce (5.30), víme, že aby mohl v konkrétním bodě (q_1, q_2) existovat, pak musí platit zároveň (5.34) a (5.35), z čehož jasně plyne:

$$\frac{MU_{q_1}}{p_{X_1}} = \frac{MU_{q_2}}{p_{X_2}} \quad \text{tj.} \quad \frac{MU_{q_1}}{MU_{q_2}} = \frac{p_{X_1}}{p_{X_2}} \quad \text{tj.} \quad MRS_C = MRS_E. \tag{5.36}$$

Z (5.36) jasně vyplývá, že aby v daném bodě (q_1, q_2) mohla mít funkce užitku svůj extrém, musí v něm platit, že $MRS_C = MRS_E$, tedy směrnice tečny indiferenční křivky v daném bodě musí být shodná se směrnicí tečny ke křivce rozpočtového omezení (budget line). Vztah (5.36) tedy popisuje *ordinalistickou* podmínku existence optima spotřebitele. Uvažujeme-li lineární křivku rozpočtového omezení (5.24), pak budget line musí být v bodě optima užitku tečná k indiferenční křivce. Výjimku tvoří pouze případy, kdy by optimální řešení bylo tzv. „rohové“, tj. kdy by optimum existovalo v bodě (q_1, q_2) takovém, že $q_1 = 0$ nebo $q_2 = 0$ – v těchto bodech nejsou indiferenční křivky ani linie rozpočtu diferencovatelné (rohová řešení jsou vyobrazena na obrázku 5.5 na grafech a, e, f; graf c reprezentuje situaci s indiferenčními křivkami nediferencovatelnými v bodě optima; graf g pak situaci, kdy řešení je v bodě $(0,0)$ – tj. specifickou situaci kdy oba statky jsou nežádoucí).

Hodnota optima tedy záleží jak na rozpočtovém omezení, tak i na tvaru indiferenčních křivek. Na obrázku 5.6 je znázorněno několik potenciálních indiferenčních map pro různé kombinace různých druhů statků, konkrétně:

a: X_1 a X_2 jsou dokonalé substituty, oba statky jsou žádoucí (tzv. „*goods*“)
b: X_1 a X_2 jsou blízké substituty, oba statky jsou žádoucí
c: X_1 a X_2 jsou dokonalé komplementy, oba statky jsou žádoucí
d: X_1 a X_2 jsou blízké komplementy, oba statky jsou žádoucí
e: statek X_2 je žádoucí, statek X_1 je lhostejný (tzv. „*neuters*“ – jeho spotřeba nemá vliv na užitek)
f: statek X_1 je nežádoucí (tzv. „*bads*“), statek X_2 je žádoucí
g: X_1 a X_2 jsou oba statky nežádoucí



Obrázek 5.6 Tvary indiferenčních křivek pro různé typy statků.

h: popisuje změnu preferencí u X_1 z žádoucího na indiferentní s jeho rostoucím spotřebovávaným množstvím, X_2 je žádoucí statek

i: popisuje změnu preferencí u X_1 z žádoucího na nežádoucí s jeho rostoucím spotřebovávaným množstvím, X_2 je žádoucí statek (jako příklad bychom mohli uvažovat odpočinek/absenci bolesti a prášky na spaní/proti bolesti, ke zlomu dochází při překročení bezpečné dávky)

Shrnutí

Spotřebu chápeme jako vynakládání důchodu na nákup výrobků a služeb. Předpokládáme, že spotřebitel řeší dvě základní otázky – jak získat důchod a jak jej vynaložit na nákup statků a služeb. Druhá z otázek pak souvisí s optimalizací chování spotřebitele, která předpokládá racionalitu spotřebitele a existenci preferenční relace splňující čtyři axiomy teorie spotřebitele. Úloha nalezení optima spotřebitele je úlohou maximalizace užitku na množině spotřebních košů omezené rozpočtovým omezením, pro její řešení je možné využít klasické optimalizační postupy známé z matematické analýzy za předpokladu, že uvažujeme kardinalistický užitek tj. předpokládáme, že existuje funkce užitku a my ji známe (užitek je měřitelný). V případě ordinalistické teorie užitku využíváme k nalezení optima spotřebitele indiferenční analýzy.

Otázky k zamyšlení

- Popište vlastními slovy, jak vypadá (tj. jak by se měl chovat) racionální spotřebitel, který by neporušoval výše uvedené axiomy teorie spotřebitele. Umíte popsat, co znamená porušení jednotlivých těchto axiomů, a najít praktické příklady, kdy k němu dochází? Jaký vliv má porušení těchto axiomů na klasickou teorii spotřebitele (co se změní, co přestává platit)?
- Jak vypadá základní rozhodnovací úloha v teorii spotřebitele – jak probíhá maximalizace užitku? Jaké informace potřebuje spotřebitel pro řešení úlohy maximalizace užitku mít k dispozici?
- Jakou roli hraje charakter/typ spotřebovávaných statků? Jak ovlivňují rozhodování spotřebitele (jeho funkci užitku a výsledné optimum) negativní externality, „bads“ a podobné typy statků?
- Jaký je rozdíl mezi rozhodováním spotřebitele v kardinalistické a ordinalistické teorii užitku? Vede každá z těchto teorií k jinému optimu spotřebitele?
- Jakou roli v nalézání optima spotřebitele mohou hrát ostatní spotřebitelé?
- Co spadá do autonomní spotřeby? Umíte jmenovat několik příkladů statků (ideálně i s odpovídajícím množstvím a cenou), které jednoznačně spadají do autonomní spotřeby? Čím je množina statků spadajících do autonomní spotřeby ovlivněna?
- Co ovlivňuje výši disponibilního důchodu?

Další zdroje informací

Baldani, J., Bradfield, J., Turner, R. W. (2005) *Mathematical economics*. Thomson South-Western, 2. vydání. ISBN 0324183321.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie I*. VŠB-TU, Ostrava.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie II*. VŠB-TU, Ostrava.

Hands, D. W. (2004) *Introductory mathematical economics*. Oxford University Press, 2. vydání. ISBN 0195133781.

Soper, J. (2004) *Mathematics for economics and business: an interactive introduction.* Wiley-Blackwell, 2. vydání. ISBN 1405111275.

Kapitola 6
Teorie užitku vs. teorie prospektů

Cíle
Prostudování této kapitoly umožní čtenáři:

- pochopit nutné předpoklady pro existenci kardinální funkce užitku,
- znát možná omezení využitelnosti teorie očekávaného užitku,
- porozumět základním principům teorie prospektů,
- chápat rozdíl mezi klasickou teorií očekávaného užitku a teorií prospektů.

6.1 Úvod

Tato krátká kapitola si klade za cíl formálně vymezit, co musí být splněno, aby kardinální funkce užitku mohla existovat. Shrneme proto základní předpoklady (tzv. axiomy) teorie užitku tak, jak je formulovali John von Neumann a Oskar Morgenstern (čtenáře, které teorie užitku a její formální konstrukce zajímá více do detailů, odkazuji na zdrojový dokument: von Neumann, J., & Morgenstern, O.: *Theory of Games and Economic Behavior.* Princeton University Press, 1944, případně na některé z pozdějších vydání této publikace). Teorie užitku i očekávaného užitku (tj. teorie utility za jistoty i za rizika, jak jednokriteriální, tak i vícekriteriální) je matematicky velmi dobře propracovaná a v ideálním případě, kdy jsou naplněny všechny její axiomy, je možné ji považovat za normativní teorii ekonomického rozhodování. Jak však poukázali mnohokrát různí autoři, např. předpoklady teorie očekávaného užitku při rozhodování za rizika nejsou často v souladu s tím, jak se rozhodují skuteční lidé. V tomto textu se podíváme na jednu možnou alternativu teorie užitku - tzv. teorii prospektů, jejímiž autory jsou Daniel Kahneman a Amos Tversky (opět odkazuji čtenáře, které by zajímalo více, na některou z jejich publikací, např. na *Kahneman, D., & Tversky, A. Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. Econometrica, 1979, 47(2), 263–292*, z níž budeme čerpat v tomto textu, nebo např. *The Framing of Decisions and the Psychology of Choice.* Science, 1981, 211(4481), 453–458).

Cílem této kapitoly je umožnit čtenáři nahlédnout pod pokličku formálních základů teorie ekonomického rozhodování, ukázat, jak vypadají jednotlivé předpoklady modelů, co z nich plyne a jak to souvisí s reálným ekonomickým rozhodováním. Začneme formulací základních předpokladů teorie užitku.

6.2 Teorie užitku, teorie očekávaného užitku – základní axiomy

V předchozí kapitole jsme uvažovali dva možné přístupy k teorii užitku – kardinalistický a ordinalistický –, přičemž např. optimum spotřebitele jsme odvozovali za předpokladu, že známe funkci utility. Nabízí se tedy otázka, co musí být splněno, aby kardinální (vyčíslitelná, analyticky zapsatelná) funkce užitku mohla vůbec existovat. Právě nutné požadavky na existenci kardinální funkce užitku jsou reprezentovány axiomy von Neumanna a Morgensterna. Základním východiskem je, že máme množinu U porovnávaných objektů (mohou jimi být stavy světa, loterie, prospekty, ale my si můžeme pro jednoduchost představit spotřební koše). Jednotlivé objekty (spotřební koše) z této množiny budeme značit např. $u, v, w \in U$. Dále předpokládáme, že na U jsou zavedeny dv2 relace:

- **relace preference** P, označovaná také „$\succ$“, kde uPv, tj. $u \succ v$, znamená, že spotřební koš u je preferován před spotřebním košem v,
- **relace indiference** I, označována také „$\approx$“, kde uIv, tj. $u \approx v$, znamená, že spotřební koše u a v jsou z pohledu rozhodovatele stejně hodnocené. Rozhodovatel je tedy vůči oběma spotřebním košům indiferentní.

Posledním výchozím předpokladem je, že na U je zavedena **operace kombinování**, tj.

$$\alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v = w, \text{ pro každé } 0 < \alpha < 1, \text{ kde } u, v, w \in U. \tag{6.1}$$

Předpoklad kombinování říká, že libovolná konvexní kombinace dvou spotřebních košů je také spotřební koš. Konvexní kombinace je přitom taková kombinace, kdy z jednoho koše vezmu $100 \cdot \alpha$ a z druhého pak $100 \cdot (1-\alpha)$ procent a tyto části spojím, aby vznikl nový spotřební koš. Všimněme si, že tímto v podstatě předpokládáme *nekonečnou dělitelnost* jednotlivých statků tvořících spotřební koš (tj. možnost uvažovat libovolnou část původního spotřebovávaného množství).

Jestliže nyní pro každé $u, v, w \in U$ platí následující axiomy, pak **existuje kardinální funkce utility**:

Axiom 1 – úplné uspořádání na U: relace P a I zavádí na U úplné uspořádání, jinými slovy:

- pro každé $u, v \in U$ platí *úplnost srovnání*, tj. platí vždy *právě jeden z následujících vztahů*:

$$u \succ v$$
$$u \prec v$$
$$u \approx v$$

- *tranzitivita*, tj.
$$(u \succ v) \wedge (v \succ w) \Rightarrow (u \succ w).$$

Axiom 2 – uspořádání a kombinace: axiom, který říká, jaký je směr preferencí v případě kombinování spotřebních košů:

- Je-li spotřební koš v preferován před spotřebním košem u, pak je libovolná kombinace v a u s nenulovým podílem v preferována před u. Pokud bychom dali hodnotě α pravděpodobnostní interpretaci, pak bychom mohli říci, že je-li spotřební koš v preferován před spotřebním košem u, pak je libovolná nenulová šance $(1-\alpha)$ získat v preferována před jistotou získat jen u:
$$(u \prec v) \Rightarrow u \prec \alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v \qquad \text{pro každé } \alpha \in (0,1).$$

- Je-li spotřební koš u preferován před spotřebním košem v, pak je u preferován také před libovolnou konvexní kombinací v a u. Alternativně při pravděpodobnostní interpretaci α říkáme, že je-li spotřební koš u preferován před spotřebním košem v, pak je jistota získat u vždy preferována před nenulovou šancí $(1-\alpha)$ získat v:
$$(u \succ v) \Rightarrow u \succ \alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v \qquad \text{pro každé } \alpha \in (0,1).$$

- Máme-li tři spotřební koše u, v a w takové, že $u \succ w \succ v$, pak bez ohledu na to, jak moc je spotřební koš u preferován před spotřebním košem v, vždy najdeme takovou jejich kombinaci, která bude lepší než w (za předpokladu, že $(1-\alpha)$ bude dostatečně malé). V pravděpodobnostní interpretaci α dostáváme, že i šance mít nejvíce preferovaný spotřební koš u s pravděpodobností α nebo nejméně preferovaný spotřební koš v s pravděpodobností $(1-\alpha)$ může být preferována před spotřebním košem w získaným s jistotou. To nastane, pokud šance získání v, tj. $(1-\alpha)$, je dostatečně malá:
$$(u \succ w \succ v) \Rightarrow \exists \alpha \in (0,1): \ \alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v \succ w.$$

- Máme-li tři spotřební koše u, v a w takové, že $u \prec w \prec v$, pak bez ohledu na to, jak moc je spotřební koš v preferován před spotřebním košem u, vždy najdeme takovou jejich kombinaci, která bude horší než w (za předpokladu, že $(1-\alpha)$ bude dostatečně malé). V pravděpodobnostní interpretaci α dostáváme, že i šance mít nejvíce preferovaný spotřební koš v s pravděpodobností $(1-\alpha)$ nebo nejméně preferovaný spotřební koš u s pravděpodobností α může být méně preferována než spotřební koš w získaný s jistotou. To nastane, pokud šance získání v, tj. $(1-\alpha)$, je dostatečně malá:
$$(u \prec w \prec v) \Rightarrow \exists \alpha \in (0,1): \ \alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v \prec w.$$

Axiom 3 – algebra kombinování: axiom, který upravuje výpočty při kombinování spotřebních košů. Vyžaduje, aby platilo následující:

- klasická *komutativita* – nezáleží na tom, v jakém pořadí spotřební koše kombinujeme (či v jakém pořadí je v kombinaci uvádíme):

$$\alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v = (1-\alpha) \cdot v + \alpha \cdot u.$$

- *distributivita* – říká, že nezáleží na tom, jestli kombinaci dvou prvků děláme v jednom nebo dvou krocích:

$$\beta \cdot (\alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v) + (1-\beta) \cdot v = \gamma \cdot u + (1-\gamma) \cdot v, \text{ kde } \gamma = \beta \cdot \alpha.$$

Jsou-li výše uvedené axiomy splněny, pak existuje kardinální funkce užitku (užitek tedy je možné vyčíslit). Funkcí užitku v tomto smyslu myslíme funkci $V\colon u \to V(u)$ s následujícími vlastnostmi pro každé $u, v \in U$:

$$u \succ v \Rightarrow V(u) > V(v), \tag{6.2}$$

$$V(\alpha \cdot u + (1-\alpha) \cdot v) = \alpha \cdot V(u) + (1-\alpha) \cdot V(v). \tag{6.3}$$

Podmínka (6.2) říká, že preferovaný objekt (spotřební koš) musí mít vyšší užitek než objekt méně preferovaný, kdežto (6.3) říká, že užitek kombinace objektů je roven kombinaci užitků se stejnými koeficienty. Funkce V je přitom dána jednoznačně až na lineární transformaci, tj. je-li $V(u)$ kardinální funkce užitku, pak $\rho(u) = \omega_1 V(u) + \omega_2$ je také kardinální fnkcí užitku splňující (6.2) a (6.3), kde $\omega_1, \omega_2 \in \mathbb{R}$ a $\omega_1 > 0$. Jak se však ukázalo v praktických experimentech, zejména (6.3) nemusí platit pro reálné rozhodovatele za všech okolností. Reakcí na tento potenciální problém byla teorie prospektů navržená Kahnemanem a Tverskym. Té se budeme věnovat v následující sekci.

6.3 Teorie prospektů

Kahneman a Tversky ve svých výzkumech a experimentech s rozhodováním reálných spotřebitelů zjistili, že v rozhodování lidé používají mnoho heuristik a zjednodušení a že výsledek rozhodování ovlivňuje mnoho různých vlivů (některé z nich jsou považovány vysloveně za rušivé a nežádoucí a pod hlavičkou „cognitive bias“ nebo kognitivní zkreslení je na ně v současnosti zaměřena pozornost mnoha výzkumníků). Výsledkem experimentů a pozorování Kahnemana a Tverskyho byl návrh alternativní teorie k teorii užitku – teorie prospektů. Teorie prospektů měla být blíže reálnému rozhodování a jako taková měla dávat lepší predikce výsledků rozhodovacích situací než teorie užitku. Vzhledem k tomu, že teorie prospektů je reakcí především na to, že obecně nemusí platit (6.3), je zavedena v kontextu rozhodování za rizika. Pracuje tedy s *loteriemi (tzv. prospekty)*, tj. takovými variantami, které mohou mít jeden z několika možných výsledků, přičemž známe pravděpodobnosti všech těchto výsledků. Symbolicky budeme loterie značit $(x, p; y, q)$, čímž máme na mysli, že v tomto případě může nastat výsledek x s pravděpodobností p, nebo výsledek y s pravděpodobností q, přičemž p a q jsou pravděpodobnosti, tj. $p+q \leq 1$ a $p,q \geq 0$. Teoreticky je možné, že $p+q < 1$, v tomto případě je $(x,p;y,q)$ stručným zápisem loterie $(x,p;y,q;0,1-p-q)$.

Podle teorie prospektů probíhá rozhodování ve dvou základních fázích:

A) Editační fáze (editing phase) – v rámci této fáze rozhodovatel upravuje/transformuje prospekty a pravděpodobnosti spojené s jednotlivými možnými výsledky. Cílem je buď zjednodušit rozhodovací problém, nebo jej upravit tak, aby se s ním rozhodovateli lépe pracovalo. Výsledek této fáze je přirozeně závislý na výběru editačních strategií. Často diskutovanými metodami jsou:

- **Kódování** – v rámci kódování často dochází k „nálepkování" prospektů jako zisků/ztráty (tzv. framing), což souvisí nutně s volbou nějakého neutrálního referenčního bodu. Volba referenčního bodu, formulace alternativy/prospektu, očekávání rozhodovatele atd. mohou v této fázi hrát zásadní roli.
- **Kombinace** – také tato strategie souvisí ze zpřehledněním rozhodovací situace. Rozhodovatel kombinuje pravděpodobnosti související se stejnými prospekty – např. $(500,0.3;500,0.3)$ je transformováno na $(500,0.6)$.
- **Segregace** – tato strategie je používána tehdy, když alternativy (prospekty) obsahují nerizikovou část. Tato neriziková komponenta je pak z alternativy oddělena jako jistý výsledek. Např. $(1300,0.6;400,0.4)$ je převedeno na $(900,0.6)$ a jistý zisk 400. Podobně pro ztráty můžeme z $(-200,0.2;-750,0.8)$ dostat $(-550,0.8)$ a jistou ztrátu 200.
- **Vyrušení** – v rámci této strategie se vypouští komponenty, které jsou všem prospektům společné. Buď je možné, že rozhodovatel zanedbá existenci celé fáze (i několika fází) rozhodovacího problému, jsou-li společné všem alternativám, nebo zanedbá společné prospekty se stejnými pravděpodobnostmi. V druhém případě by tedy např. z $(300,0.1;-50,0.7;150,0.2)$ a $(300,0.1;50,0.3;-100,0.6)$ byly vytvořeny alternativy $(-50,0.7;150,0.2)$ a $(50,0.3;-100,0.6)$.
- **Zjednodušení** – často použitím této strategie dochází např. k zaokrouhlování pravděpodobností na požadovanou přesnost či zaokrouhlování hodnot prospektů – např. $(199,0.51)$ je zjednodušeno na 50% šanci získat 200. Zjednodušování také zahrnuje zanedbávání (přehlížení) extrémně nepravděpodobných výsledků.
- **Detekce dominance** – aplikuje se pravidlo dominance a vypouštějí se prospekty, které jsou dominovány jinými.

B) Hodnotící fáze (evaluation phase) – v rámci této fáze je každému objektu (který už prošel editační fází) přiřazeno hodnocení. K jejímu zavedení potřebujeme následující koncepty:

- $H(x,p;y,q)$ – funkce popisující *celkové hodnocení* / celkovou hodnotu prospektu či varianty.
- $\Pi(p)$ – *rozhodovací váha* daného prospektu, která odráží dopad konkrétní pravděpodobnosti p na výslednou hodnotu alternativy/prospektu. Je dobré si uvědomit, že rozhodovací váhy jsou funkcí pravděpodobností, ale samy

o sobě pravděpodobnostmi nejsou (netvoří rozdělení pravděpodobnosti). Jejich součet tedy nemusí být roven 1. Obvykle uvažujeme-li dva možné výsledky x s pravděpodobností p a y s pravděpodobností $1-p$, pak $\Pi(p)+\Pi(1-p) < 1$.
- $p, q, \ldots$ – *pravděpodobnosti jednotlivých výsledků.*
- $h(x)$ – odráží subjektivní *hodnotu výsledku* x; často vyjádřeno jako odchylka od referenčního bodu (tj. jako zisk nebo ztráta).

Pokud nyní budeme uvažovat varianty $(x,p;y,q)$ se dvěma možnými výsledky x a y, můžeme celkové hodnocení varianty definovat následujícím způsobem:

- pro $p+q < 1$ (tj. pro varianty, kdy je možné s nenulovou pravděpodobností dosáhnout i výsledku 0) nebo pro $x \leq 0 \leq y$ nebo pro $x \geq 0 \geq y$ (tj. varianty, kdy je možné získat i ztratit) máme

$$H(x,p;y,q) = \Pi(p) \cdot h(x) + \Pi(q) \cdot h(y), \tag{6.4}$$

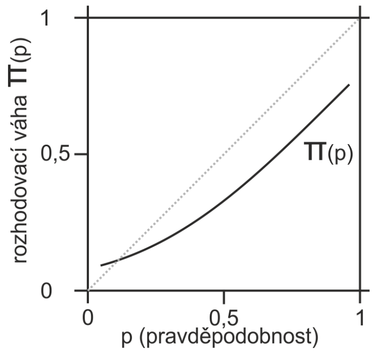
  kde pro jednoznačnost definujme $h(0) = 0$, $\Pi(0) = 0$ a $\Pi(1) = 1$. Jak můžeme snadno vidět, (6.4) má podobnou stavbu jako (6.3), jen místo pravděpodobností jsou použity rozhodovací váhy. Mohli bychom tedy říct, že tento případ je zoběcněním teorie očekávané utility, který nahrazuje princip očekávání $V(x,p;y,q)$ $= p \cdot v(x) + q \cdot v(y)$ vztahem (6.4), přičemž pro $\Pi(p) = p$ a $\Pi(q) = q$ oba vztahy splývají
- pro $p+q = 1$ a zároveň $x < y < 0$ nebo pro $x > y > 0$ pak dostáváme

$$H(x,p;y,q) = h(y) + \Pi(p) \cdot (h(x) - h(y)), \tag{6.5}$$

  kde $h(y)$ je hodnota jisté (nerizikové) komponenty dané varianty, viz strategie segregace.

Z výše uvedeného vidíme, že $H(x,p;y,q)$ je zobecněním funkce utility pro klasické prospekty, kde je možné získat i ztratit, případně kde je nenulová šance získat 0 (případ (6.4)). Nicméně v situaci, kdy všechny možné výsledky varianty jsou buď zisky, nebo jsou všechny ztrátami, se $H(x,p;y,q)$ svou strukturou od funkce utility liší – závisí na hodnocení jistého výsledku a na rozdílu mezi jistým a druhým výsledkem, při zohlednění rozhodovací váhy výsledku x. Abychom mohli vztahy pro výpočet hodnoty prospektu snáze pochopit, měli bychom si říci, jak vypadá typická váhová funkce $\Pi(p)$. Kahneman a Tversky experimentálně zjistili, že malé pravděpodobnosti bývají nadhodnocovány, zatímco velké pravděpodobnosti bývají subjektivně podhodnocovány. Vztah mezi pravděpodobnostmi jednotlivých výsledků a odpovídajícími rozhodovacími vahami je ilustrován na obrázku 6.1. Připomeňme, že rozdíl mezi hodnotou pravděpodobnosti a odpovídající rozhodovací váhy není v situaci, kdy $\Pi(p) = p$, v tomto bodě platí také princip očekávání a hodnotící funkce splývá s funkcí užitku.

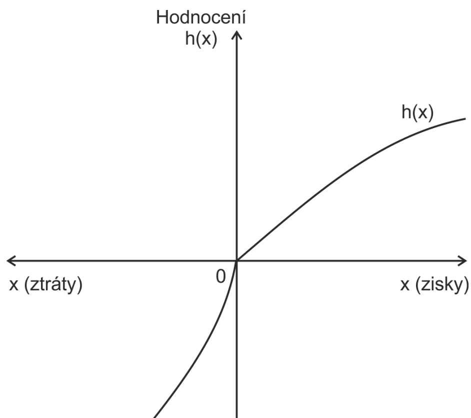
Výše jsme také uvedli, že zásadní roli v hodnocení varianty hraje také klasifikace jednotlivých výsledků jako zisky nebo ztráty vzhledem ke zvolenému referenčnímu bodu. Jinak řečeno, nositelem hodnoty jsou změny vůči počátečnímu (případně re-



Obrázek 6.1 Možný tvar funkce popisující vztah pravděpodobností a rozhodovacích vah. Je zřejmé, že malé pravděpodobnosti jsou nadhodnocovány, zatímco velké pravděpodobnosti jsou podhodnocovány.

ferenčnímu) stavu, nikoliv finální stav. Hodnota varianty nebo konkrétního možného výsledku by tedy měla být funkcí referenčního bodu a velikosti změny; uvažování pouze velikosti změny (tj. velikosti zisku/ztráty vůči počáteční hodnotě) však dává také dostatečnou aproximaci hodnoty. Obecně má funkce hodnoty následující vlastnosti (dle Kahnemana a Tverskyho – viz obrázek 6.2):

- je definována na změnách hodnot (tj. např. na ziscích/ztrátách vzhledem k počátečnímu/referenčnímu stavu),
- je konkávní pro zisky a konvexní pro ztráty,
- je strmější pro ztráty než pro zisky.



Obrázek 6.2 Možný tvar funkce hodnoty jednotlivých možných výsledků varianty. Je patrný rozdíl funkčního vztahu na oboru vnímaných zisků a ztrát.

Teorie prospektů je reakcí na teorii užitku a snaží se vysvětlit a popsat, kde vznikají odchylky od chování popisovaného funkcí užitku (a očekávaným užitkem) u reálných rozhodovatelů. V principu je teorie prospektů velmi dobrým příkladem behaviorálního výzkumu v ekonomii vedoucího k úpravě ekonomické teorie.

Shrnutí

Za splnění výše uvedených axiomů (von Neumanna a Morgensterna), které popisují, jak mají fungovat preference spotřebitele, existuje kardinální funkce užitku, tedy užitek je vyčíslitelný. V tomto případě je pak funkce užitku jedinečná, až na lineární transformace. Funkce užitku by měla reflektovat preference, tj. preferované má mít větší užitek než méně preferované, a měla by splňovat princip očekávání. Právě princip očekávání (tj. výpočet očekávaného užitku v rozhodování za rizika) však nemusí být široce aplikovatelný v reálných situacích. Kahneman a Tversky experimentálně ukázali, že lidé při rozhodování používají řadu heuristik pro úpravu variant (editační fáze), a následně varianty hodnotí, přičemž nejsou používány přímo pravděpodobnosti jednotlivých výsledků, ale rozhodovací váhy z nich vypočtené.

Otázky k zamyšlení

- Jak má za splanění základních axiomů (von Neumanna a Morgensterna) vypadat funkce užitku? Má nějaké očekávané nebo typické vlastnosti? Pokud ano, jaké a z čeho plynou?
- Kahneman a Tversky v principu říkají, že funkce užitku a rozhodování na základě očekávaného užitku nemusí být normativní, protože spotřebitelé používají zjednodušení a heuristiky, která se z pohledu normativní teorie mohou jevit jako porušení racionality. Proto jsou také často nazývány jako „decision/cognitive bias". Výše jsme si uvedli několik metod, které jsou dle těchto autorů často používány v editační fázi rozhodování. Dokázali byste u sebe vysledovat nějaké praktické příklady jejich použití? Pokud ano, považujete využití metod/heuristik z editační fáze rozhodování za iracionální?
- Dokážete najít příklady výše popsaných postupů/heuristik/bias aplikovaných často v hodnoticí fázi rozhodovacího procesu?
- Co sami považujete za „vysokou pravděpodobnost" a co považujete za „nízkou pravděpodobnost"? Umíte tyto pojmy kvantifikovat a popsat, jak jste k daným numerickým hodnotám došli? Jaká znáte rohodovací/kognitivní vychýlení (cognitive biases) a jakou roli hrají v ekonomickém rozhodování?

Další zdroje informací

Baldani, J., Bradfield, J., Turner, R. W. (2005) *Mathematical economics*. Thomson South-Western, 2. vydání. ISBN 0324183321.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie I*. VŠB-TU, Ostrava.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie II*. VŠB-TU, Ostrava.

Hands, D. W. (2004) *Introductory mathematical economics*. Oxford University Press, 2. vydání. ISBN 0195133781.

Kahneman, D., Tversky, A. (1979) Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk. *Econometrica*, 47(2), 263–292.

Tversky, A., Kahneman, D. (1981). The framing of decisions and the psychology of choice. *Science*, 211(4481), 453–458.

Soper, J. (2004) *Mathematics for economics and business: an interactive introduction.* Wiley-Blackwell, 2. vydání. ISBN 1405111275.

von Neumann, J., Morgenstern, O. (1944): *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton University Press.

Kapitola 7
Poptávka

Cíle
Prostudování této kapitoly umožní čtenáři:

- uvědomit si, co všechno může mít vliv na poptávku po určitém statku,
- být schopen popsat vliv změny důchodu, ceny poptávaného statku i ceny ostatních statků na poptávku po určitém statku,
- poznat různé možnosti reprezentace poptávkové křivky (jako Engelova křivka – závislost poptávky na důchodě, odvození „klasické“ poptávkové křivky z cenové spotřební křivky jako závislost poptávky na ceně statku),
- chápat poptávkovou křivku jako množinu bodů optima spotřebitele, a tudíž úzce spjatou s teorií spotřebitele a maximalizací jeho užitku,
- sestrojit tržní poptávkovou křivku po určitém statku na základě individuálních poptávkových křivek po tomto statku.

7.1 Úvod

Poptávková funkce je jedním ze základních pojmů při analýze trhu a hledání tržní rovnováhy. V této kapitole se podíváme na to, jakým způsobem je možné zkonstruovat individuální poptávkovou křivku daného spotřebitele. Využijeme k tomu jak poznatky z předchozích kapitol o teorii spotřebitele, tak také popis vlivu změn důchodu a změn cen statků na spotřebovávané množství statku. Ukážeme si, že poptávková křivka vzniká v těsné souvislosti s hledáním optima spotřebitele a jako taková koresponduje s řešením mnoha úloh na maximalizaci užitku spotřebitele.

Obecně popisuje poptávka vztah mezi množstvím zboží, které je spotřebitel ochoten koupit (které nakupuje), cenou tohoto zboží a také cenami ostatních druhů zboží (substitutů, komplementů, ostatních statků tvořících spotřební koš) a důchodem spotřebitele. Uvažujeme-li jediného spotřebitele a n statků, které spotřebovává (a tedy i poptává), můžeme jeho individuální poptávkové funkce zapsat v obecném tvaru jako

$$D_1: \quad q_1 = f_1(p_{X_1}, \ldots, p_{X_n}, y), \tag{7.1}$$

$$D_2: \quad q_2 = f_2(p_{X_1}, \ldots, p_{X_n}, y), \tag{7.2}$$

$$\ldots$$

$$D_n: \quad q_n = f_n(p_{X_1}, \ldots, p_{X_n}, y), \tag{7.3}$$

kde

- p_{X_i} je cena i-tého statku, $i \in \{1, \ldots, n\}$, tj. v f_i jde o cenu statku, pro nějž popisujeme poptávkovou funkci; ve všech ostatních f_j, $j \neq i$ jde o cenu některého z dalších spotřebovávaných statků.
- y je důchod spotřebitele.
- q_i je poptávané množství statku X_i naším konkrétním spotřebitelem.

Připomeňme, že např. v pavučinových modelech jsme uvažovali, že $q_i = f(p_{X_i})$, tj. uplatňovali jsme klasický ekonomický předpoklad *ceteris paribus*. Tj. $q_i = f(p_{X_i})$ ceteris paribus je totéž jako $q_i = f_i(p_{X_1}, \ldots, p_{X_n}, y)$ za předpokladu, že $p_{X_1}, \ldots, p_{X_{i-1}}, p_{X_{i+1}}, p_{X_n}$ a y se nemění. Jestliže je tedy někde poptávková funkce uváděna jako funkce jediné proměnné, pak existuje nevyřčený předpoklad ceteris paribus, tj. předpoklad, že všechny ostatní proměnné mající potenciální vliv na poptávané množství zůstávají konstantní. Mezi další faktory, které ovlivňují poptávku, bychom mohli řadit např. preference spotřebitele, jeho zvyky, očekávání atd. Tyto faktory však budeme pro účely další analýzy považovat za neměnné.

Dále budeme uvažovat pro jednoduchost spotřebu pouze dvou statků X_1 resp. X_2 (oba tyto statky jsou žádoucí) a jim odpovídající ceny P_{X_1} resp. P_{X_2} a důchod spotřebitele o výši y. Toto zjednodušení nám umožní graficky situaci reprezentovat ve dvou rozměrech. Zobecnění našich závěrů na více spotřebovávaných statků přitom není nijak náročné. Abychom zachovali snadnou grafickou reprezentovatelnost, budeme vždy uvažovat, že některá z veličin p_{X_1}, p_{X_2} a y zůstává neměnná. Nyní se nabízí několik otázek, které je nutné zodpovědět, než budeme schopni odvodit/sestrojit poptávkovou křivku (funkci). Co vlastně ovlivňuje poptávku a jakým způsobem? Při konstantním důchodu je reakcí na změnu ceny jednoho nebo obou statků pohyb po poptávkové ploše $q_1 = f_1(p_{X_1}, p_{X_2})$ resp. $q_2 = f_2(p_{X_1}, p_{X_2})$. Co tedy obecně může ovlivňovat poptávkovou funkci, kromě změny ceny spotřebovávaného statku a ostatních spotřebovávaných statků?

- **Změna cen komplementů** – např. v situaci, kdy rostou ceny komplementů statku X_1, se může snižovat poptávka po tomto staktu, jelikož důchod již nestačí na nákup původního poptávaného množství X_1 a jemu odpovídajícího množství komplementu.
- **Změna cen substitutů** – např. klesají-li ceny substitutů statku X_1, může při konstantním důchodu a konstantní ceně p_{X_1} být pro spotřebitele výhodnější spotřebovávat více substitutu statku X_1, čímž dojde ke snížení poptávaného množství statku X_1.
- **Změna preferencí spotřebitele** – spotřebitel může prostě přestat chtít spotřebovávat daný statek v tak vysokém množství, může se mu změnit vkus atd.

- **Získání dodatečných informací o trhu** – může jít o doplnění kontextu výrobce, např. neetické výrobní praktiky, používání nebezpečných nebo nekvalitních materiálů ve výrobě, získání referencí ostatních spotřebitelů, apod.
- **Změna očekávání** – může dojít např. k tomu, že se změní to, co spotřebitel považuje za vysoce pravděpodobné v budoucnosti. Např. předpokládá-li najednou teplou zimu, patrně to ovlivní poptávku po teplém oblečení.
- **Změna důchodu** – při změně důchodu může dojít jak k proporcionálnímu nárůstu poptávky po všech statcích, tak i k výrazné změně struktury poptávaných statků. S výrazným poklesem důchodu bude klesat poptávka po luxusním zboží, při nárůstu důchodu může jednak růst poptávka po luxusním zboží, ale může také klesat poptávka po zboží podřadném atd.

Zaměříme se zejména na dva výše uvedené faktory – tj. vliv cen (jak konkrétního spotřebovávaného statku, tak statku druhého) a důchodu na změnu poptávky po daném statku.

7.2 Vliv změny důchodu na poptávku

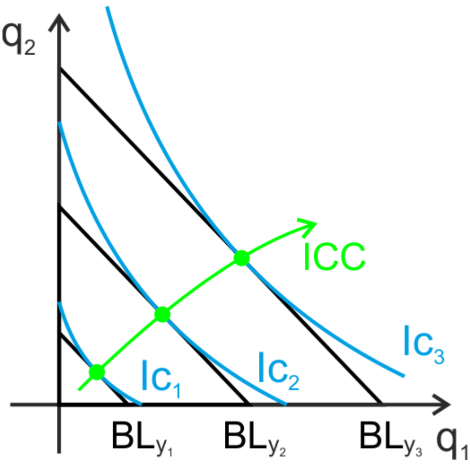
Budeme nyní uvažovat, že se ceteris paribus mění pouze důchod spotřebitele – ceny všech statků (tj. v našem zjednodušeném případě ceny p_{X_1} a p_{X_2}), preference spotřebitele atd. považujeme za neměnné. Jak se změní poptávka, když dojde ke zvýšení důchodu spotřebitele?

7.2.1 Důchodová spotřební křivka (ICC)

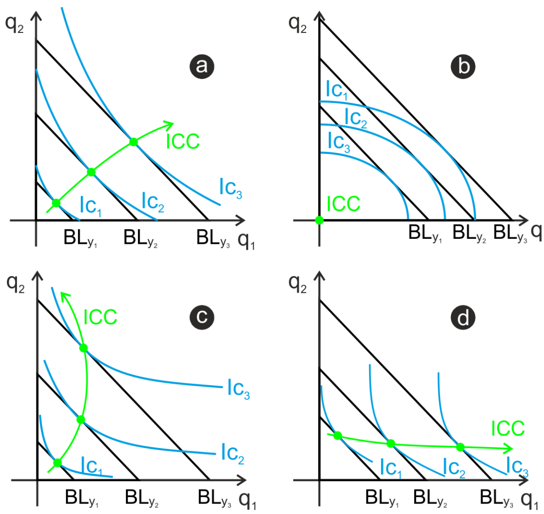
Důchodová spotřební křivka *ICC* (z anglického Income Consumption Curve) je tvořena všemi kombinacemi spotřebovávaných množství statků X_1 a X_2 , které pro některou úroveň důchodu maximalizují užitek spotřebitele. Můžeme ji zapsat jako

$$ICC = \left\{ (q_1^*, q_2^*) \middle| TU(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_1, q_2} TU(q_1, q_2) \Big|_{y=k}, \; k \in (0, \infty) \right\}. \tag{7.4}$$

ICC je dle definice (7.4) tvořena takovými kombinacemi spotřebovávaných množství obou statků, které maximalizují užitek spotřebitele při daném důchodu y. Z kapitoly 5 víme, že v těchto bodech musí platit, že $MRS_E = MRS_C$ (a směrnice tečny k budget line, tedy MRS_E je konstantní, jelikož budget line je lineární funkcí. To je dáno právě předpokladem ceteris paribus, tj. neměnností cen p_{X_1} a p_{X_2}, neměnností preferencí atd.). Můžeme říci, že *ICC* popisuje změnu kombinací optimálních množství spotřebovávaných statků pro různé hodnoty důchodu, ceteris paribus. Příklad *ICC* pro dva žádoucí statky (normální) je prezentován na obrázku 7.1.
Přirozeně má na tvar *ICC*, zejména na její směr, vliv typ spotřebovávaného statku.



Obrázek 7.1 Důchodová spotřební křivka *ICC* (zelená) je množinou všech řešení úloh maximalizace užitku spotřebitele při spotřebě dvou statků X_1 a X_2 a při různých úrovních důchodu $y_1 < y_2 < y_3$, kterým odpovídají rozpočtová omezení BL_1, BL_2, BL_3 (černá). Předpokládáme neměnnou funkci užitku reprezentovanou indiferenčními křivkami IC_1, IC_2, IC_3 (modrá).



Obrázek 7.2 Důchodové spotřební křivky *ICC* (zelené) pro různé kombinace statků. a) oba statky žádoucí a normální; b) oba statky nežádoucí; c) oba statky žádoucí, X_1 méněcenný a X_2 normální; d) oba statky žádoucí, X_1 normální a X_2 méněcenný.

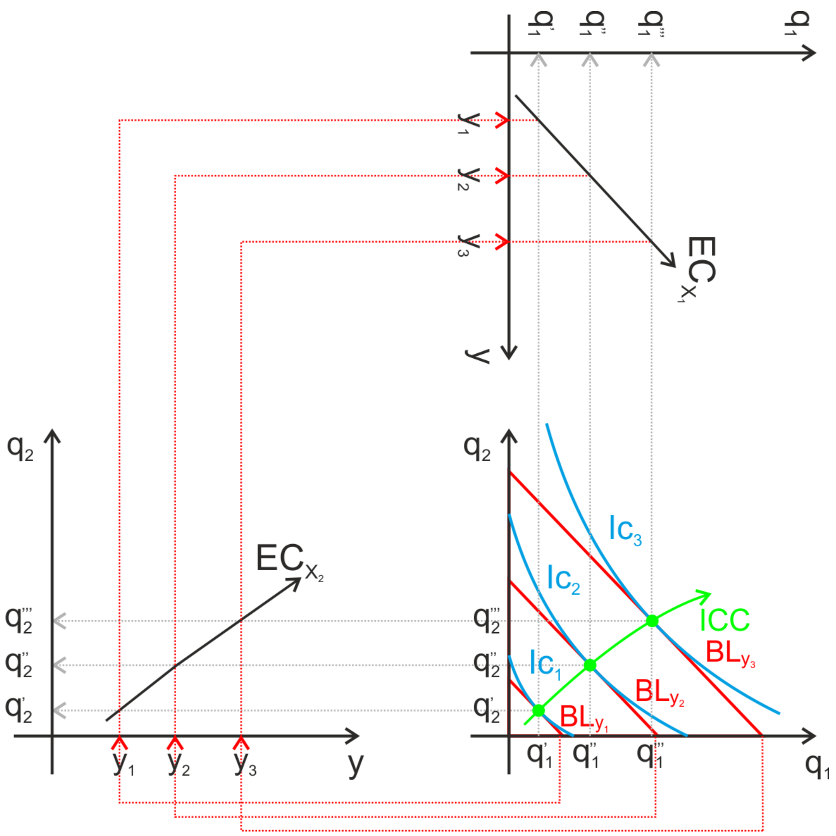
Na obrázku 7.2 jsou znázorněny čtyři příklady důchodových spotřebních křivek:

Graf a – oba statky X_1 a X_2 jsou žádoucí a normální, s růstem důchodu proto roste spotřeba obou statků. *ICC* je tedy rostoucí (směřuje doprava nahoru, tj. má SV směr).

Graf b – oba statky X_1 a X_2 jsou nežádoucí (tzv. bads) a jejich spotřeba je spojena se záporným užitkem. S růstem důchodu se proto spotřeba obou statků nemění a zůstává v optimálním bodě $(0,0)$. *ICC* je v tomto případě redukována na jediný bod, a to $(0,0)$.

Graf c – oba statky X_1 a X_2 jsou žádoucí, přičemž X_2 je normální a X_1 je méněcenný, tj. s růstem důchodu jeho spotřeba od určitého bodu klesá. *ICC* v tomto případě od určitého bodu směřuje doleva nahoru, má tedy SZ směr.

Graf d – oba statky X_1 a X_2 jsou žádoucí, přičemž X_1 je normální a X_2 je méněcenný. *ICC* v tomto případě od určitého bodu směřuje doprava dolů, má tedy JV směr.



Obrázek 7.3 Odvození Engelových křivek EC_{X_1} a EC_{X_2} z *ICC*. Engelovy křivky mohou v tomto případě být chápány jako specifické poptávkové funkce, kdy poptávané množství se mění v závislosti na výši důchodu spotřebitele a vše ostatní zůstává neměnné, včetně cen jednotlivých spotřebovávaných statků.

Každý bod *ICC* má v sobě úroveň důchodu obsaženou vždy jako omezující parametr, který je zohledněn při hledání maximálního užitku daného spotřebitele. Každé úrovni důchodu y_i odpovídá linie rozpočtu BL_i použitá při hledání optima spotřebitele. Může být žádoucí vyjádřit závislost poptávaného množství konkrétního statku přímo na důchodu. Tuto závislost graficky znázorňuje *Engelova křivka* (*EC*).

7.2.2 Engelova křivka (EC)

Engelova křivka (EC, z anglického Engel Curve) popisuje vztah mezi důchodem spotřebitele a poptávaným množstvím daného statku. Jde o závislost poptávaného množství daného statku na důchodu spotřebitele, přičemž toto poptávané množství je takové, že spolu s ostatními poptávanými množstvími ostatních statků maximalizuje spotřebiteli užitek. Můžeme tedy psát, že:

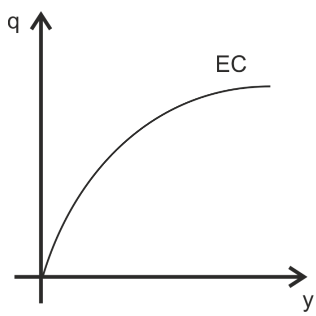
$$EC_{X_i}: \quad q_i = f(y). \tag{7.5}$$

EC_{X_i} je tedy trochu netradiční poptávkovou funkcí, která popisuje, jak se mění poptávané množství daného statku v závislosti na důchodu, ceteris paribus (tj. za předpokladu, že ceny jednotlivých statků a vše ostatní zůstává neměnné). Přitom je stále na pozadí maximalizace užitku, tj. jednotlivé body EC_{X_i} odpovídají takovým poptávaným množstvím statku X_i, která maximalizují užitek daného spotřebitele.

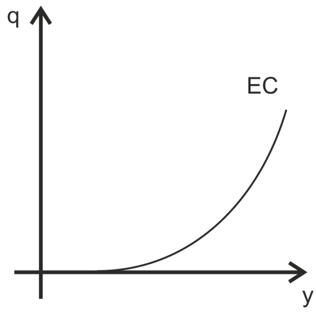
Schematicky je souvislost mezi *ICC*, *EC*, důchodem spotřebitele a maximalizací užitku znázorněna na obrázku 7.3.

Jelikož je *EC* ve své podstatě poptávkovou funkcí, je možné z jejího tvaru identifikovat typ statku (jinými slovy různé typy statků odpovídají různým tvarům *EC*):

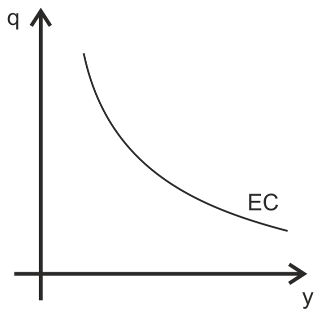
- Pro *normální statky EC* roste, tj. $\frac{dEC}{dy} > 0$, přičemž
  - pro *nezbytné statky* roste degresivně, tj. $\frac{d^2EC}{dy^2} < 0$, viz obrázek 7.4. To je pochopitelné, jelikož nezbytných statků je spotřebováváno jen takové množšství, aby byly uspokojeny základní potřeby. Jakmile dojde k jejich uspokojení, není třeba spotřebovávat výrazně více těchto statků, a to bez ohledu na to, jak roste důchod.
  - pro *luxusní statky* roste progresivně, tj. $\frac{d^2EC}{dy^2} > 0$, viz obrázek 7.5. Opět je intuitivně jasné, že luxusní statky jsou spotřebovávány až od určité úrovně důchodu (kdy zbývá důchod i na jiné než nezbytné statky) a s růstem důchodu je možné jich spotřebovávat stále více a více.
- Pro *méněcenné statky EC* klesá, tj. $\frac{dEC}{dy} < 0$, viz obrázek 7.6.



Obrázek 7.4 Engelova křivka pro nezbytné statky roste degresivně (je konkávní).



Obrázek 7.5 Engelova křivka pro luxusní statky roste progresivně (je konvexní).



Obrázek 7.6 Engelova křivka pro méněcenné statky klesá.

Ještě názornějším nástrojem pro pochopení rozdílů mezi jednotlivými typy statků jsou Engelovy výdajové křivky (EEC).

7.2.3 *Engelova výdajová křivka (EEC)*

Engelova výdajová křivka EEC (z anglického Engel Expenditure Curve) je grafickým znázorněním funkční závislosti výdajů spotřebitele na spotřebu konkrétního statku X_i na výši spotřebitelova důchodu y, tj.

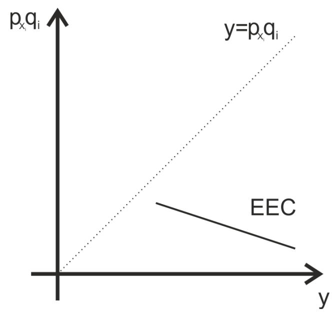
$$EEC_{X_i}: \quad p_{X_i} \cdot q_i = f_i(y). \tag{7.6}$$

Lze očekávat, že racionální spotřebitel se bude chovat v souladu s následujícími tvrzeními:

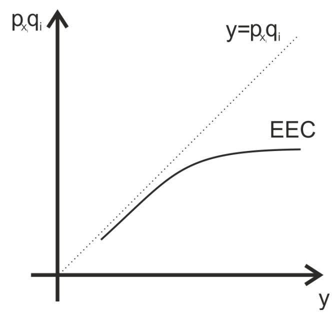
- S rostoucím důchodem bude spotřebitel spotřebovávat stále méně a méně méněcenných statků. Může si totiž dovolit je ve stále větší míře ve spotřebě nahrazovat statky normálními. Jelikož očekáváme, že se spotřebovávané množství těchto statků s rostoucím důchodem nezvyšuje, pak při konstantních cenách musí výdaje spotřebitele na méněcenné statky buď zůstávat konstantní, nebo se snižovat. EEC proto pro méněcenné statky obvykle klesá, viz obrázek 7.7.
- S růstem důchodu bude zpočátku růst spotřeba nezbytných statků, dokud nedojde k tomu, že jsou základní potřeby spotřebitele uspokojované těmito statky

nasyceny. Od tohoto okamžiku už buď k nárůstu spotřeby nezbytných statků nedochází, nebo k němu dochází jen ve velmi malé míře. Dá se tedy očekávat, že EEC pro nezbytné statky bude degresivně rostoucí. Jinými slovy, EEC roste, ale s rostoucím y se vzdaluje od linie $p_{X_i} \cdot q_i = y$. Formálně zapsáno získáváme $\frac{dEEC}{dy} \geq 0$ a zároveň $\frac{d^2EEC}{dy^2} < 0$, viz obrázek 7.8.

- S růstem důchodu se začínají ve spotřebě objevovat i luxusní statky a jejich podíl na spotřebě neustále narůstá. EEC pro tyto statky tedy roste progresivně, blíží se k linii $p_{X_i} \cdot q_i = y$ a platí $\frac{dEEC}{dy} \geq 0$ a zároveň $\frac{d^2EEC}{dy^2} > 0$, viz obrázek 7.9.



Obrázek 7.7 Engelova výdajová křivka pro méněcenné statky klesá.



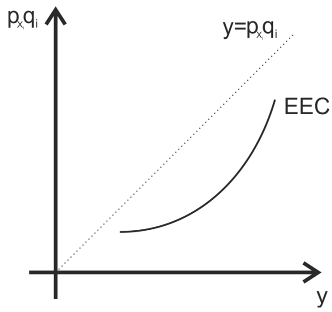
Obrázek 7.8 Engelova výdajová křivka pro nezbytné statky degresivně roste a s rostoucím y se neustále vzdaluje od přímky $p_{X_i} \cdot q_i = y$.

7.2.4 Další veličiny související se spotřebou

V rámci analýzy spotřeby a spotřebních funkcí může mít smysl zavést také některé další veličiny.

- První z nich bude *podíl statku X_i na celkové spotřebě*, ozn. μ_{X_i}:

$$\mu_{X_i} = \frac{p_{X_i} \cdot q_i}{y}. \tag{7.7}$$



Obrázek 7.9 Engelova výdajová křivka pro luxusní roste progresivně a s rostoucím y se neustále blíží k přímce $p_{X_i} \cdot q_i = y$.

Hodnota μ_i udává, jaká část celkového důchodu je věnována na spotřebu statku X_i. Nepřekračuje-li spotřebitel rozpočtové omezení, pak $\mu_i \leq 1$ pro každý statek X_i, $i = 1, \ldots, n$, a $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$.

- *Celkový sklon ke spotřebě* statku X_i, tj. TPC_{X_i} (z anglického Total Propensity to Consume), definujeme jako
$$TPC_{X_i} = q_i, \tag{7.8}$$
tj. přímo jako spotřebovávané množství statku X_i.
- *Průměrný sklon ke spotřebě* statku X_i, tj. APC_{X_i} (z anglického Average Propensity to Consume), definujeme jako
$$APC_{X_i} = \frac{TPC_{X_i}}{y} = \frac{q_i}{y}. \tag{7.9}$$
APC_{X_i} tedy udává, kolik jednotek statku X_i si koupíme za každou jednotku důchodu y za předpokladu, že každou jednotku důchodu utratíme stejně.
- *Mezní sklon ke spotřebě* statku X_i, tj. MPC_{X_i} (z anglického Marginal Propensity to Consume), definujeme jako
$$MPC_{X_i} = \frac{dTPC_{X_i}}{dy} = \frac{dq_i}{dy}. \tag{7.10}$$
MPC_{X_i} říká, jaký nárůst/pokles spotřeby statku X_i nastane jako reakce na změnu důchodu o jednotku.
- *Důchodová elasticita poptávky* po statku X_i, ozn. $E_{yD_{X_i}}$, je definována následujícím vztahem:
$$E_{yD_{X_i}} = \frac{\frac{q_{i2}-q_{i1}}{\frac{q_{i2}+q_{i1}}{2}}}{\frac{y_2-y_1}{\frac{y_2+y_1}{2}}} = \frac{\frac{\Delta q_i}{q_i}}{\frac{\Delta y}{y}}. \tag{7.11}$$
$E_{yD_{X_i}}$ tedy popisuje relativní změnu poptávaného množství statku X_i vyvolanou relativní změnou důchodu. Vztah (7.11) popisuje obloukovou důchodovou elasticitu poptávky, tedy uvažuje jinou než nekonečně malou změnu důchodu. Pro $\Delta y \to 0$, tj. pro nekonečně malé změny důchodu, můžeme definovat důchodovou eleasticitu poptávky v bodě následujícím vztahem:

$$E_{yD_{X_i}} = \frac{\frac{dq_i}{q_i}}{\frac{dy}{y}} = \frac{\frac{dq_i}{dy}}{\frac{q_i}{y}} = \frac{MPC_{X_i}}{APC_{X_i}}. \tag{7.12}$$

Pro hodnoty $E_{yD_{X_i}}$ pak platí následující:

- pro *méněcenné statky* je $E_{yD_{X_i}} \leq 0$,
- pro *nezbytné statk*y je $E_{yD_{X_i}} \in \langle 0, 1\rangle$,
- pro *luxusní statky* je $E_{yD_{X_i}} > 1$.

Pojďme se nyní podívat, k čemu nám výše uvedené veličiny mohou být dobré. Uvažujme, že spotřebitel vydává veškerý svůj důchod na spotřebu statků X_1 a X_2. Potom musí platit

$$p_{X_1} \cdot q_1 + p_{X_2} \cdot q_2 = y. \tag{7.13}$$

Když rovnici (7.13) zderivujeme podle důchodu y, dostáváme

$$p_{X_1} \cdot \frac{dq_1}{dy} + p_{X_2} \cdot \frac{dq_2}{dy} = 1. \tag{7.14}$$

Výrazy na levé straně (7.14) můžeme rozšířit a získáme tak

$$p_{X_1} \cdot \frac{dq_1}{dy} \cdot \frac{q_1 \cdot y}{q_1 \cdot y} + p_{X_2} \cdot \frac{dq_2}{dy} \cdot \frac{q_2 \cdot y}{q_2 \cdot y} = 1, \tag{7.15}$$

což můžeme přepsat na

$$\frac{p_{X_1} \cdot q_1}{y} \cdot \frac{dq_1}{dy} \cdot \frac{y}{q_1} + \frac{p_{X_2} \cdot q_2}{y} \cdot \frac{dq_2}{dy} \cdot \frac{y}{q_2} = 1, \tag{7.16}$$

což je možné přepsat jako

$$\frac{p_{X_1} \cdot q_1}{y} \cdot \frac{MPC_{X_1}}{APC_{X_1}} + \frac{p_{X_2} \cdot q_2}{y} \cdot \frac{MPC_{X_2}}{APC_{X_2}} = 1, \tag{7.17}$$

a tedy s využitím důchodových elasticit poptávky dostáváme:

$$\frac{p_{X_1} \cdot q_1}{y} \cdot E_{yD_{X_1}} + \frac{p_{X_2} \cdot q_2}{y} \cdot E_{yD_{X_2}} = 1. \tag{7.18}$$

Nyní ještě využijeme zavedené veličiny „podíl statku na spotřebě“ (7.7) a rovnici (7.18) přepíšeme do finálního tvaru

$$\mu_{X_1} \cdot E_{yD_{X_1}} + \mu_{X_2} \cdot E_{yD_{X_2}} = 1. \tag{7.19}$$

Výraz (7.19) je možné snadno zobecnit na libovolný počet (n) spotřebovávaných statků. Z toho, jak jsou definovány veličiny μ_{X_1} a μ_{X_2} a ze skutečnosti, že spotřebitel vynakládá celý svůj důchod na spotřebu, pak vyplývá, že

$$\mu_{X_1} + \mu_{X_2} = 1, \tag{7.20}$$

nebo obecně pro n spotřebovávaných statků $\sum_{i=1}^{n} \mu_i = 1$.

I když možná zatím není úplně jasné, proč jsme si výše uvedenými úpravami prošli, mělo smysl je udělat. Ze vztahů (7.19) a (7.20) totiž plynou zajímavé důsledky. Je totiž třeba si uvědomit, že μ_i jsou ve skutečnosti normované váhy, a tedy (7.19) není nic jiného než vážený průměr důchodových elasticit poptávky $E_{yD_{X_j}}$ s normovanými vahami. Takovýto průměr má několik zajímavých vlastností, např. jeho výsledek nebude nikdy ležet mimo interval $\left\langle \min_i E_{yD_{X_i}}, \max_i E_{yD_{X_i}} \right\rangle$. Z toho můžeme např. vyvodit, že:

- Pokud $E_{yD_{X_i}} > 1$ pro nějaké i, tj. pokud spotřebitel nakupuje nějaký luxusní statek X_i, pak musí nakupovat také nějaký nezbytný nebo méněcenný statek. Jinak řečeno platí
$$\left(\exists i:\ E_{yD_{X_i}} > 1\right) \Rightarrow \left(\exists j:\ E_{yD_{X_j}} < 1\right), \tag{7.21}$$
jinými slovy není možné spotřebovávat pouze luxusní statky.
- Pokud $E_{yD_{X_i}} < 0$ pro nějaké i, tj. pokud spotřebitel nakupuje nějaký méněcenný statek X_i, pak musí nakupovat také nějaký luxusní statek, jinak řečeno platí
$$\left(\exists i:\ E_{yD_{X_i}} < 0\right) \Rightarrow \left(\exists j:\ E_{yD_{X_j}} > 1\right). \tag{7.22}$$

Tím máme zmapovány alespoň základní souvislosti důchodu a poptávky. Nyní se zaměříme na klasičtější pojetí poptávky – tj. jako závislosti poptávaného množství na ceně. Ani v tomto případě to však není zcela jednoduché, neboť můžeme uvažovat, že jedinou veličinou, která se mění, je cena poptávaného statku (standardní přístup), nebo cena některého z ostatních statků, případně že se mění více proměnných zároveň. Prvním dvěma možnostem se budeme věnovat v následující sekci, změnám více proměnných najednou se v tomto základním textu věnovat nebudeme.

7.3 Vliv změny cen statků na poptávku

Předpokládejme opět, že spotřebitel spotřebovává pouze dva statky X_1 a X_2 při důchodu y. Uvažujeme tedy, že poptávaná množství obou statků jsou funkcí cen obou statků a důchodu, tj. že $q_1 = f_1(p_{X_1}, p_{X_2}, y)$ a $q_2 = f_2(p_{X_1}, p_{X_2}, y)$. V minulé sekci jsme předpokládali, že se – ceteris paribus – mění y. Nyní se podíváme, jaký bude vliv změn jednotlivých cen na poptávku po statku X_1.

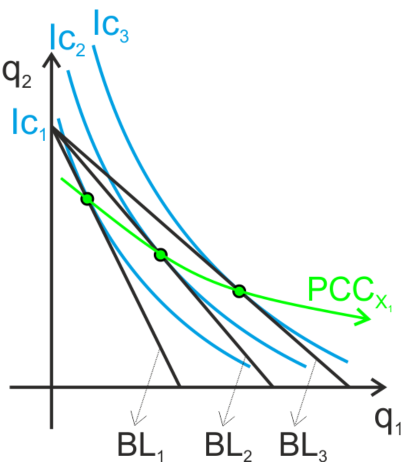
7.3.1 Cenová spotřební křivka (PCC)

Nejdříve se podíváme na to, jaký vliv má změna ceny p_{X_1} na poptávku po X_1. V tomto případě tedy zůstává neměnná cena p_{X_2} a také důchod spotřebitele y.

Jestliže budou X_1 a X_2 oba žádoucí statky, pak s nárůstem ceny statku X_1 při stálé ceně statku X_2 a neměnném důchodu a neměnné funkci užitku (tj. ceteris paribus) bude spojen pokles množství statku X_1, které si je spotřebitel schopen pořídit při daném důchodu. Uvažujeme nyní stále, že spotřebitel maximalizuje svůj užitek, a tedy že kompenzuje změnu spotřeby X_1 změnou spotřebovaného množství statku X_2. Můžeme tedy nyní definovat tzv. *cenovou spotřební křivku* (PCC z anglického Price Consumption Curve), která prochází takovými body (q_1, q_2), které při konstantní ceně p_{X_2} a konstantním důchodu y maximalizují užitek spotřebitele pro konkrétní hodnoty p_{X_1}. Konkrétně:

$$PCC_{X_1} = \left\{ (q_1^*, q_2^*) \middle| TU(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_1, q_2} TU(q_1, q_2) \Big|_{p_{X_1}=k},\ k \in (0, \infty) \right\} \qquad (7.23)$$

Uvažujeme-li, že poptávka po X_1, tj. D_{X_1} se dá vyjádřit jako $D_{X_1} = f(p_{X_1}, p_{X_2}, y)$, pak změna p_{X_1}, ceteris paribus, má za následek změnu sklonu křivky rozpočtového omezení (a tedy změnu tvaru množiny tržních příležitostí) v grafu hledání optima spotřebitele. Mění se tedy MRS_E a tím pádem i optimální MRS_C jako důsledek změny p_{X_1}. Přitom průsečík BL s osou q_2 zůstává stále stejný – viz obrázek 7.10.

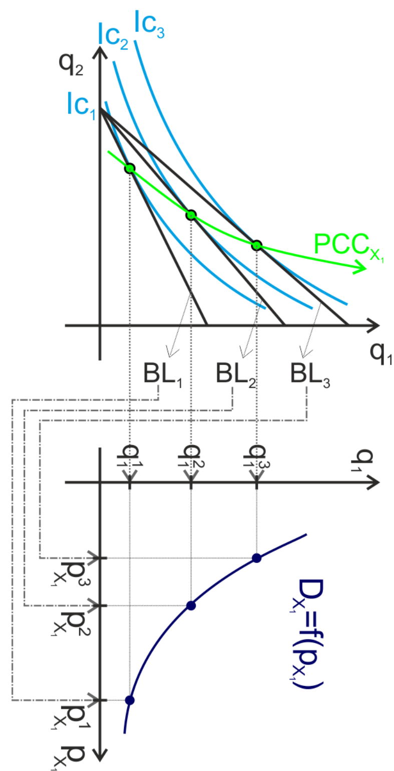


Obrázek 7.10 Odvození cenové spotřební křivky PCC_{X_1} jako množiny bodů (q_1^*, q_2^*) maximalizujících užitek spotřebitele při změně p_{X_1} a konstantních hodnotách p_{X_2} a y. BL_1 odpovídá $p_{X_1}^1$, BL_2 odpovídá $p_{X_1}^2$ a BL_3 odpovídá $p_{X_1}^3$, přičemž platí, že $p_{X_1}^1 > p_{X_1}^2 > p_{X_1}^3$.

Cenová spotřební křivka PCC_{X_1} definovaná jako (7.23) a znázorněná na obrázku 7.10 je pak základem pro odvození klasické poptávkové funkce. Jednotlivé optimální hodnoty q_1^* jsou vyneseny do grafu proti odpovídající ceně p_{X_1}, a tím získáváme klasickou poptávkovou křivku $D_{X_1} = q_1 = f(p_{X_1})$, jak je nejčastěji v ekonomii uváděna a používána. Proces odvození této klasické poptávkové křivky je znázorněn na obrázku 7.11. Na tomto místě je možná vhodné zdůraznit některé vlastnosti, které mají body ležící na poptávkové křivce $D_{X_1} = f(p_{X_1})$:

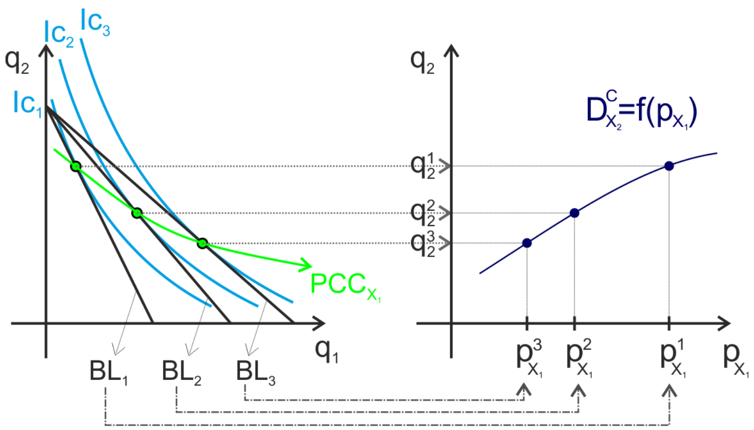
- Jednotlivá poptávaná množství jsou taková, že *maximalizují užitek spotřebitele* v kontextu jeho celého spotřebního koše (v našem zjednodušeném případě obsahuje spotřební koš pouze statky X_1 a X_2). Poptávané množství q_1 při ceně p_{X_1} je totiž vždy odvozeno z bodu optima spotřebitele (viz definici PCC (7.23)).

- Jednotlivá poptávaná množství jsou *dosažitelná/přípustná*, tj. spotřebiteli na ně vždy stačí důchod (a to zvládne ještě nakoupit ostatní statky ze spotřebního koše tak, aby maximalizoval svůj užitek). Body poptávkové křivky jsou odvozeny z optim spotřebitele, která vždy leží uvnitř souboru tržních příležitostí, nebo na jeho hranici.
- Jednotlivé body poptávkové křivky *zohledňují také spotřebu všech ostatních statků* ve spotřebním koši spotřebitele.

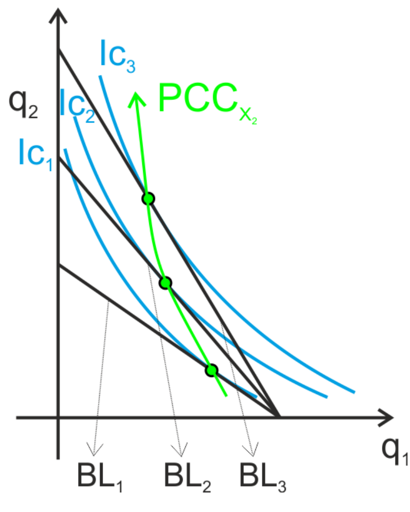


Obrázek 7.11 Odvození poptávkové křivky D_{X_1} z cenové spotřební křivky PCC_{X_1}.

Podobným procesem, jako jsme odvodili poptávkovou křivku D_{X_1} z PCC_{X_1}, by bylo možné odvodit také funkci, která by popisovala poptávané množství statku X_2 v závislosti na změně ceny p_{X_1}. Takto odvozená poptávková funkce $D^C_{X_2} = q_2 = f(p_{X_1})$ je nicméně trochu netradiční poptávkovou funkcí, neboť popisuje závislost poptávaného množství statku na ceně statku jiného, ceteris paribus. I tak jde o variantu poptávkové funkce – poptávkovým funkcím tohoto typu můžeme pro zjednodušení značení říkat *křížové poptávkové funkce* a budeme je značit horním indexem C. Proces odvození $D^C_{X_2}$ ilustruje obázek 7.12. Uvědomme si, že i $D^C_{X_2}$ je složena z bodů, které maximalizují užitek spotřebitele, jsou dosažitelné a zohledňují spotřebu všech ostatních statků ve spotřebním koši daného spotřebitele.



Obrázek 7.12 Odvození křížové poptávkové křivky $D^C_{X_2} = f(p_{X_1})$ z cenové spotřební křivky PCC_{X_1}.



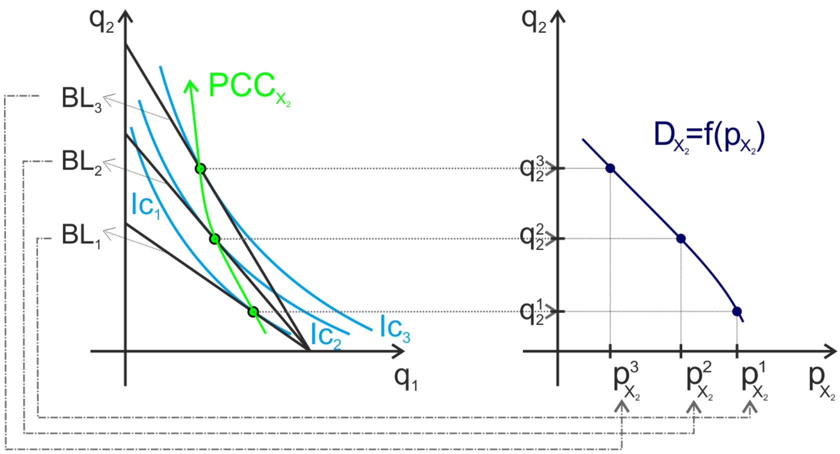
Obrázek 7.13 Odvození cenové spotřební křivky PCC_{X_2} jako množiny bodů (q_1^*, q_2^*) maximalizujících užitek spotřebitele při změně p_{X_2} a konstantních hodnotách p_{X_1} a y. BL_1 odpovídá $p^1_{X_2}$, BL_2 odpovídá $p^2_{X_2}$ a BL_3 odpovídá $p^3_{X_2}$, přičemž platí, že $p^1_{X_2} > p^2_{X_2} > p^3_{X_2}$.

Analogicky bychom mohli sledovat vliv změny ceny X_2, tj. změny p_{X_2} na poptávané množství obou statků X_1 a X_2 tvořících spotřební koš, a to za předpokladu neměnného důchodu y a neměnné ceny p_{X_1}. Můžeme tedy definovat cenovou spotřební křivku PCC_{X_2} následujícím způsobem:

$$PCC_{X_2} = \left\{ (q_1^*, q_2^*) \middle| TU(q_1^*, q_2^*) = \max_{q_1, q_2} TU(q_1, q_2) \Big|_{p_{X_2} = k}, \; k \in (0, \infty) \right\}. \tag{7.24}$$

Graficky ilustruje PCC_{X_2} obrázek 7.13.

Z PCC_{X_2} můžeme odvodit klasickou poptávkou funkci po X_2, tj. $D_{X_2} = q_2 = f(p_{X_2})$ (viz obrázek 7.14), jejíž vlastnosti i odvození jsou analogické D_{X_1}. Můžeme také odvodit křížovou poptávkovou funkci po X_1, tj. $D^C_{X_1} = q_1 = f(p_{X_2})$ (viz obrázek 7.15). V následujících třech podsekcích se zaměříme na to, jaké různé efekty může



Obrázek 7.14 Odvození poptávkové křivky $D_{X_2} = f(p_{X_2})$ z cenové spotřební křivky PCC_{X_2}.

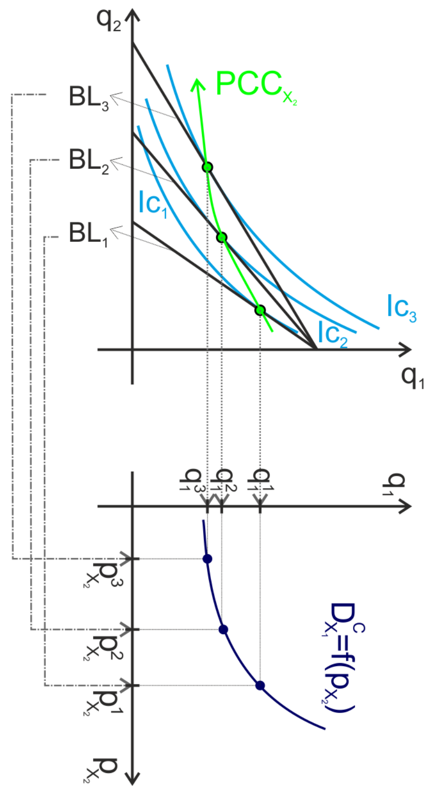
změna ceny statku mít na poptávané množství – rozlišíme substituční efekt, důchodový efekt a celkový efekt a odvodíme Slutského rovnici.

7.3.2 Substituční efekt změny ceny statku (SE_{X_i})

Substituční efekt popisuje změnu poptávaného množství statku X_i v důsledku substituce relativně dražšího statku levnějším. Popisuje tedy posun po indiferenční křivce při zachování stejného užitku. Říká nám, jaký pokles (nárůst) poptávaného množství statku X_i je vyvolán nárůstem (poklesem) ceny jednotky tohoto statku p_{X_i}. Formálně můžeme pro statek X_i definovat substituční efekt SE_{X_i} pomocí (7.25), případně pomocí (7.26) v případě nekonečně malých změn p_{X_i}.

$$SE_{X_i} = \frac{\Delta q_i}{\Delta p_{X_i}} \bigg|_{TU=konst} \tag{7.25}$$

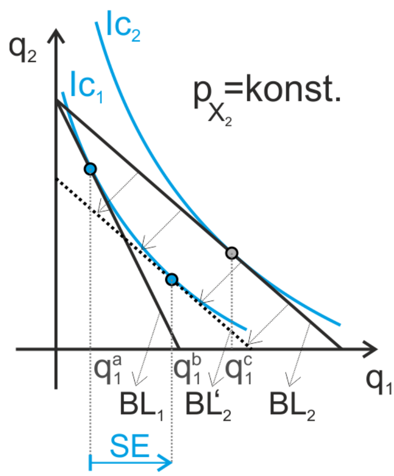
$$SE_{X_i} = \frac{dq_i}{dp_{X_i}} \bigg|_{TU=konst} \tag{7.26}$$



Obrázek 7.15 Odvození křížové poptávkové křivky $D^C_{X_1} = f(p_{X_2})$ z cenové spotřební křivky PCC_{X_2}.

Graficky je substituční efekt změny p_{X_1} na poptávané množství X_1 znázorněn na Obrázku 7.16. Jak je z obrázku patrné, jde o posun poptávaného množství q_1^a při původní ceně $p^a_{X_1}$, které odpovídá BL_1, na množství q_1^b, které odpovídá BL'_2, tj. rovnoběžce s BL_2, která je tečná k původní indiferenční křivce. BL_2 pak odpovídá nové (v tomto případě vyšší) ceně statku X_1, tj. $p^c_{X_1}$. Substituční efekt tedy popisuje, jak se vlivem změny ceny daného statku změní poptávané množství jako důsledek substituce tohoto statku statky jinými. Pro žádoucí statky platí, že $SE_{X_i} < 0$, jelikož nárůst ceny p_{X_i} vyvolá pokles poptávaného množství statku X_i, jelikož je částečně nahrazen ve spotřebě relativně levnějšími substituty. Analogicky to platí také pro pokles ceny p_{X_i}.

Při našich úvahách zatím abstrahujeme od tzv. důchodového efektu, tj. efektu změny reálného důchodu vyvolané změnou ceny sledovaného statku.



Obrázek 7.16 Substituční efekt změny ceny p_{X_1} statku X_1 na poptávané množství q_1. Obrázek předpokládá nárůst ceny z $p^a_{X_1}$, které odpovídá poptávané množství q^a_1 na cenu $p^c_{X_1}$, které odpovídá poptávané množství q^c_1. Substituční efek nepokrývá celou změnu z q^a_1 na q^c_1, ale jen její část odpovídající substituci relativně dražšího statku X_1 některým ze statků relativně levnějších.

7.3.3 *Důchodový efekt změny ceny statku (YE_{X_i})*

Změna ceny některého ze statků při neměnných cenách ostatních statků a neměnném nominálním důchodu nemá za následek pouze substituci relativně dražších statků jejich relativně levnějšími substituty. Teoreticky může působit podobně jako změna samotného důchodu diskutovaná už v sekci 7.2. Je totiž potřeba si uvědomit, že i když se nominální důchod nijak nemění, tak vlivem změny např. p_{X_1} si může spotřebitel za tentýž důchod y koupit jiné množství statku X_1. Tím pádem vlivem změny ceny p_{X_1} dochází ke změně reálného důchodu. Změnu reálného důchodu můžeme vyjádřit následujícím způsobem:

$$\Delta y_r = -\Delta p_{X_i} \cdot q_i \tag{7.27}$$

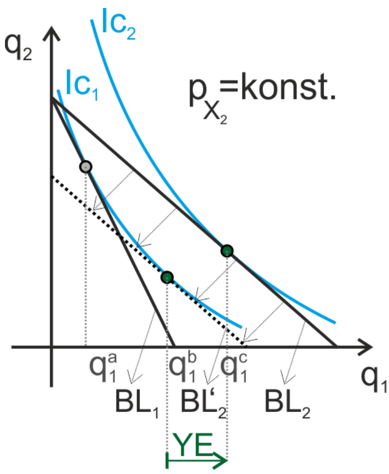
Právě s touto změnou souvisí *důchodový efekt* změny ceny statku X_1 (ozn. YE). Formálně je tedy důchodový efekt změny ceny statku X_i, tj. p_{X_i}, na spotřebu tohoto statku (ozn. YE_{X_i}) definován následujícím způsobem:

$$YE_{X_i} = \left.\frac{\Delta q_i}{\Delta p_{X_i}}\right|_{\text{ze změny reálného } y} \tag{7.28}$$

nebo při nekonečně malých změnách:

$$YE_{X_i} = \left.\frac{dq_i}{dp_{X_i}}\right|_{\text{ze změny reálného } y} \tag{7.29}$$

Tento přístup je plně v souladu s pojetím důchodového efektu Eugenem Slutskym. Povšimněme si, že pro normální (žádoucí) statky je také $YE_{X_i} < 0$, jako SE_{X_i}. Také zde pokles ceny p_{X_i} vyvolá nárůst reálného důchodu a tedy potenciálně navýší spotřebu X_i, analogicky pro nárůst p_{X_i}. Obrázek 7.17 ilustruje důchodový efekt změny ceny statku X_1 na jeho poptávané množství.



Obrázek 7.17 Důchodový efekt změny ceny p_{X_1} statku X_1 na poptávané množství q_1. Obrázek předpokládá nárůst ceny z $p^a_{X_1}$, které odpovídá poptávané množství q^a_1 na cenu $p^c_{X_1}$, které odpovídá poptávané množství q^c_1. Důchodový efekt pokrývá tu část celkové změny poptávaného množství q_1, která souvisí se změnou (v tomto případě nárůstem) reálného důchodu y, tj. posun z q^b_1 na q^c_1 mezi dvěma rovnoběžnými rozpočtovými křivkami BL'_2 a BL_2.

7.3.4 *Celkový efekt změny ceny statku* (TE_{X_i})

Celkový efekt TE_{X_i} popisuje, jaký celkový vliv má změna ceny jednotky statku X_i, tj. změna p_{X_i}, na celkové poptávané množství statku X_i. Můžeme jej tedy definovat následujícím způsobem:

$$TE_{X_i} = \frac{\Delta q_i}{\Delta p_{X_i}}, \tag{7.30}$$

případně pro nekonečně malé změny jako

$$TE_{X_i} = \frac{dq_i}{dp_{X_i}}. \tag{7.31}$$

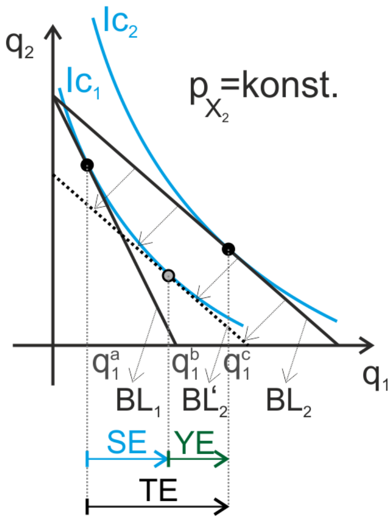
Celkový efekt je znázorněn na obrázku 7.18. Uvažujeme přitom, že celkový efekt je součtem efektu substitučního a důchodového:

$$TE_{X_i} = SE_{X_i} + YE_{X_i} \tag{7.32}$$

a tedy v případě větších změn

$$TE_{X_i} = \left.\frac{\Delta q_i}{\Delta p_{X_i}}\right|_{TU=konst} + \left.\frac{\Delta q_i}{\Delta p_{X_i}}\right|_{\text{ze změny reálného } y} \tag{7.33}$$

a v případě nekonečně malých změn dostáváme:



Obrázek 7.18 Celkový efekt změny ceny p_{X_1} statku X_1 na poptávané množství q_1. Obrázek předpokládá nárůst ceny z $p^a_{X_1}$, které odpovídá poptávané množství q^a_1 na cenu $p^c_{X_1}$, které odpovídá poptávané množství q^c_1. Celkový efekt pokrývá celou změnu z q^a_1 na q^c_1 a je zřetelně součtem substitučního a důchodového efektu změny ceny.

$$TE_{X_i} = \left.\frac{dq_i}{dp_{X_i}}\right|_{TU=konst} + \left.\frac{dq_i}{dp_{X_i}}\right|_{\text{ze změny reálného } y} . \tag{7.34}$$

Z (7.27) si můžeme vyjádřit změnu ceny pomocí (7.35).

$$\Delta p_{X_i} = -\frac{\Delta y_r}{q_i} \quad \text{resp.} \quad dp_{X_i} = -\frac{dy_r}{q_i} \tag{7.35}$$

Nyní můžeme tedy přepsat (7.33) a (7.34) do tvaru (7.36) a (7.37):

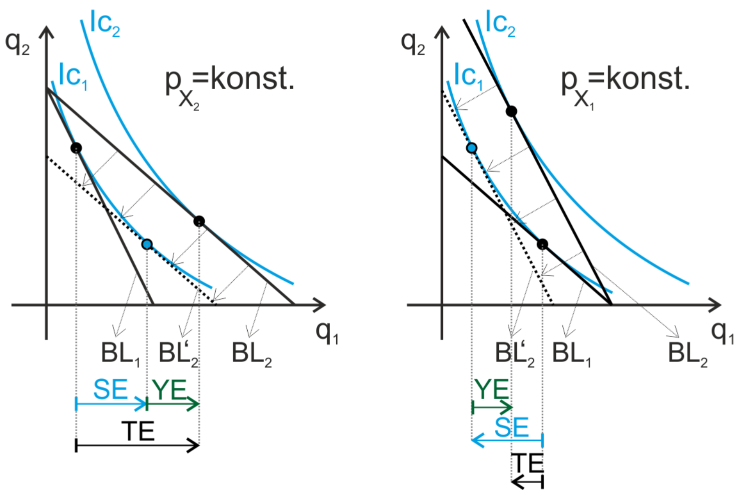
$$TE_{X_i} = \left.\frac{\Delta q_i}{\Delta p_{X_i}}\right|_{TU=konst} - q_i \cdot \left.\frac{\Delta q_i}{\Delta y_r}\right|_{\text{ze změny } p_{X_i}} \tag{7.36}$$

a v případě nekonečně malých změn dostáváme:

$$TE_{X_i} = \left.\frac{dq_i}{dp_{X_i}}\right|_{TU=konst} - q_i \cdot \left.\frac{dq_i}{dy_r}\right|_{\text{ze změny } p_{X_i}} . \tag{7.37}$$

Rovnice (7.36) a (7.37) jsou vyjádřením tzv. *Slutského rovnice* popisující celkový efekt změny ceny statku na jeho poptávané množství.

Přirozeně můžeme uvažovat v kontextu celkového efektu také vliv změny ceny statku X_j na poptávané množství statku X_i. Obrázek 7.19 ilustruje platnost Slutského rovnice a předpokladu, že $TE = SE + YE$. Stejný obrázek také srovnává vliv změny p_{X_1} a p_{X_2} na poptávané množství statku X_1.



Obrázek 7.19 Vlevo celkový efekt změny ceny p_{X_1} statku X_1 na poptávané množství q_1 statku X_1 a jeho složení z SE_{X_1} a YE_{X_1}. Platí, že $TE_{X_1} = SE_{X_1} + YE_{X_1}$. Vpravo celkový efekt změny ceny p_{X_2} statku X_2 na poptávané množství q_1 statku X_1 a jeho složení z $SE^C_{X_1}$ a $YE^C_{X_1}$. Platí, že $TE_{X_1} = SE^C_{X_1} + YE^C_{X_1}$. Přitom $SE^C_{X_1} = \frac{\Delta q_1}{\Delta p_{X_2}}\Big|_{TU=konst}$ a $YE^C_{X_1} = \frac{\Delta q_1}{\Delta p_{X_2}}\Big|_{\text{ze změny reálného } y}$.

7.3.5 *Další veličiny související s poptávkou a změnou ceny statků*

V této fázi má smysl definovat si ještě několik charakteristik poptávky a poptávkových funkcí a uvést je do vztahů s některými veličinami již definovanými dříve:

- *Cenová elasticita poptávky* po statku X_i, ozn. $E_{pD_{X_i}}$, je definována následujícím vztahem:

$$E_{pD_{X_i}} = \frac{\frac{\Delta q_i}{q_i}}{\frac{\Delta p_{X_i}}{p_{X_i}}}. \tag{7.38}$$

  Jako taková popisuje relativní změnu poptávaného množství statku X_i, tj. relativní změnu q_i, vyvolanou relativní změnou jeho ceny, tj. změnou p_{X_i}. Je možné ji samozřejmě definovat také pro nekonečně malé změny (tj. pro spojitý případ) jako:

$$E_{pD_{X_i}} = \frac{\frac{dq_i}{q_i}}{\frac{dp_{X_i}}{p_{X_i}}}. \tag{7.39}$$

  Pro normální statky je $E_{pD_{X_i}} < 0$, jelikož nárůst ceny statku vyvolá pokles poptávaného množství tohoto statku. Kladná je pouze pro Giffenův statek.
- *Křížová elasticita poptávky* po statku X_i, ozn. $E^C_{pD_{X_i}}$, je definována následujícím vztahem:

$$E^C_{pD_{X_i}} = \frac{\frac{\Delta q_i}{q_i}}{\frac{\Delta p_{X_j}}{p_{X_j}}}. \tag{7.40}$$

Jako taková popisuje relativní změnu poptávaného množství statku X_i, tj. relativní změnu q_i, vyvolanou relativní změnou ceny některého z ostatních poptávaných statků X_j, $i \neq j$, tj. změnou p_{X_j}. Opět můžeme tuto veličinu definovat i pro nekonečně malé změny (tj. pro spojitý případ) jako:

$$E^C_{pD_{X_i}} = \frac{\frac{dq_i}{q_i}}{\frac{dp_{X_j}}{p_{X_j}}}. \tag{7.41}$$

Hodnoty křížové elasticity mají opět specifickou interpretaci:

– pokud $E^C_{pD_{X_i}} > 0$, pak statky X_i a X_j jsou substituty,
– pokud $E^C_{pD_{X_i}} < 0$, pak statky X_i a X_j jsou komplementy.

Již dříve jsme si také definovali vztahy (7.11) a (7.12) důchodovou elasticitu poptávky $E_{yD_{X_i}}$. Nabízí se nyní otázka, jestli mezi $E_{yD_{X_i}}$, $E_{pD_{X_i}}$ a $E^C_{pD_{X_i}}$ existuje nejaký vztah.

Můžeme vyjít z toho, že poptávková funkce je homogenní funkcí nultého stupně. To znamená, že změní-li se všechny ceny i důchod ve stejné proporci (např. pronásobením stejnou konstantou), pak se nezmění poptávané množství. Uvažujeme-li tedy, že $D_{X_i} = f(p_{X_i}, p_{X_j}, y)$, pak to, že D_{X_i} je homogenní funkcí nultého stupně znamená, že $D_{X_i} = f(n \cdot p_{X_i}, n \cdot p_{X_j}, n \cdot y) = n^0 \cdot f(p_{X_i}, p_{X_j}, y)$, kde n je libovolná kladná konstanta. Z Eulerovy věty o homogenních funkcích pak plyne, že:

$$\frac{dq_i}{dp_{X_i}} \cdot p_{X_i} + \frac{dq_i}{dp_{X_j}} \cdot p_{X_j} + \frac{dq_i}{dy} \cdot y = 0. \tag{7.42}$$

Pokud celou rovnici (7.42) vydělíme q_i, dostáváme:

$$\frac{dq_i}{dp_{X_i}} \cdot \frac{p_{X_i}}{q_i} + \frac{dq_i}{dp_{X_j}} \cdot \frac{p_{X_j}}{q_i} + \frac{dq_i}{dy} \cdot \frac{y}{q_i} = 0. \tag{7.43}$$

Což s využitím (7.39), (7.41) a (7.12) můžeme přepsat jako:

$$E_{pD_{X_i}} + E^C_{pD_{X_i}} + E_{yD_{X_i}} = 0. \tag{7.44}$$

Tím dostáváme jednoduchý vztah mezi cenovou, křížovou a důchodovou elasticitou poptávky.

7.4 Tržní poptávka

Až doposud jsme konstruovali individuální poptávkové křivky, tj. poptávkové křivky konkrétního spotřebitele. Pro ekonomickou analýzu nás však může zajímat také celková poptávka po konkrétním statku. Ta je přirozeně závislá na poptávce a poptávkových funkcích jednotlivých spotřebitelů. *Tržní poptávku* po daném statku X_i získáme pro daný statek jako součet jednotlivých individuálních poptávkových křivek $D_{X_i,s}$, kde index s říká, kterému spotřebiteli daná poptávková křivka odpovídá, $s = 1,\ldots,r$. Jinak řečeno, tržní poptávané množství při konkrétních cenách a konkrétních důchodech jednotlivých spotřebitelů je rovno součtu poptávaných množství daného statku jednotlivými spotřebiteli za těchto podmínek. Pokud tedy uvažujeme jako doposud, že např. $D_{X_1,s} = f_s(p_{X_1}, p_{X_2}, y_s)$, pak celková (tržní) poptávka po X_1 je definována jako $D^*_{X_1}$ následujícím vztahem:

$$D^*_{X_1} = \sum_{s=1}^{r} (D_{X_1,s}) = \sum_{s=1}^{r} f_s(p_{X_1}, p_{X_2}, y_s) = f^*(p_{X_1}, p_{X_2}, y_1, \ldots, y_r). \tag{7.45}$$

Úplně obecně, pokud uvažujeme m statků $X_1,\ldots,X_m$, tj. že $D_{X_1,s} = f(vy_s)$ a r spotřebitelů, můžeme tržní poptávkovou funkci psát ve tvaru:

$$D^*_{X_1} = \sum_{s=1}^{r} (D_{X_1,s}) = \sum_{s=1}^{r} f_s(p_{X_1},\ldots,p_{X_m}, y_s) = f^*(p_{X_1},\ldots,p_{X_m}, y_1,\ldots,y_r). \tag{7.46}$$

Shrnutí

Poptávku (individuální) chápeme jako vztah mezi poptávaným množstvím určitého statku a cenami všech poptávaných statků a důchodem spotřebitele. Není myslitelné uvažovat poptávkovou křivku po určitém statku izolovaně od poptávkových křivek po ostatních statcích. Poptávková křivka spotřebitele po daném statku úzce souvisí s maximalizací jeho užitku na množině spotřebních košů, a tedy i s poptávkovými křivkami po ostatních statcích a s optimem spotřebitele. Spotřebitel poptává vždy takové množství daného statku, které mu při daných cenách a daném důchodu spolu s ostatními spotřebovávanými statky maximalizuje užitek. Přitom respektuje své rozpočtové omezení. Na poptávku má vliv jak změna důchodu spotřebitele (tzv. důchodový efekt (YD) vyvolaný změnou nominálního nebo reálného důchodu), tak také změna ceny některého ze statků ve spotřebním koši (tzv. substituční efekt (SE)). Tržní poptávková křivka je součtem individuálních poptávkových křivek. Tržní poptávková funkce je funkcí cen všech statků vyskytujících se ve spotřebních koších jednotlivých spotřebitelů, tak i všech jejich důchodů.

Otázky k zamyšlení

- Na základě čeho vzniká (teoretická) poptávková křivka a co tento model ochoty spotřebitele poptávat zboží při dané ceně reprezentuje? Jaký význam mají jednotlivé body poptávkové křivky a jak souvisí s optimem spotřebitele?
- Jakou roli hraje koncept Paretovské optimality při formování poptávkové funkce? Uměli byste to vysvětlit/ukázat na jednoduchém příkladu?
- Je poptávková funkce funkcí jen ceny poptávaného statku, nebo jde ve skutečnosti o funkci více proměnných? Pokud ano, kterých a jakou hrají roli?
- V jakém smyslu je Engelova křivka poptávkovou křivkou? Co Engelova křivka popisuje?
- Jaké typy poptávkových křivek známe, co popisují a jakou roli hrají v ekonomickém rozhodování? Proč pracujeme v klasických ekonomických modelech s poptávkovou křivkou, která dává do vztahu poptávané množství a cenu daného statku a ne ostatní typy poptávkových křivek?
- Proč nemůže poptávková křivka existovat bez nalezení optima spotřebitele? Nebo může?
- Jakým způsobem spotřebitel alokuje důchod mezi spotřebu a úspory? Co ovlivňuje mezní sklon ke spotřebě a mezní sklon k úsporám a jaký to má v důsledku vliv na poptávku? Existuje také mezní sklon k investicím či jinému ekonomicky relevantnímu vynakládání důchodu?

Další zdroje informací

Baldani, J., Bradfield, J., Turner, R. W. (2005) *Mathematical economics*. Thomson South-Western, 2. vydání. ISBN 0324183321.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie I*. VŠB-TU, Ostrava.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie II*. VŠB-TU, Ostrava.

Hands, D. W. (2004) *Introductory mathematical economics*. Oxford University Press, 2. vydání. ISBN 0195133781.

Soper, J. (2004) *Mathematics for economics and business: an interactive introduction.* Wiley-Blackwell, 2. vydání. ISBN 1405111275.

Kapitola 8
Teorie produkce, formování nabídky

Cíle
Prostudování této kapitoly umožní čtenáři:

- porozumět rozdílu mezi pojmy transformační a produkční funkce a pracovat s nimi při tvorbě ekonomických modelů,
- uplatnit izokvantovou analýzu a analýzu produktivitních funkcí při zkoumání produkční funkce,
- porozumět roli výnosů z rozsahu (jejich matematické reprezentaci) a výrobních faktorů v popisu procesu produkce,
- znát obecný tvar Cobb-Douglasovy produkční funkce,
- lépe porozumět termínu „výnosy z rozsahu“ a jeho souvislosti s produkční funkcí,
- na jednoduchém příkladu CDPF pochopit charakteristiky produkčních funkcí popsané v předchozí kapitole,
- získat představu o možnostech a úskalích odvozování produkční funkce z dat.

8.1 Úvod

Další podstatnou část trhu tvoří strana nabídky. Ta bude v našich úvahách reprezentována výrobci. Obecně můžeme říci, že výrobci transformují v rámci ekonomiky vstupy na výstupy. Přitom obdobně jako spotřebitelé optimalizují své chování ve smyslu maximalizace zisku, minimalizace nákladů, maximalizace podílu na trhu a podobně. V této kapitole si popíšeme chování výrobce, jeho rozhodování a konstrukci produkční funkce. Uvedeme si některé ekonomické charakteristiky produkční funkce a zohledníme roli výrobních faktorů v procesu produkce.

Na trh se tedy v této kapitole budeme dívat z pohledu producentů (výrobců). Popíšeme si styl uvažování potřebný pro optimální alokaci výrobních faktorů potřebných pro výrobu statků. Přitom vztahy mezi vstupy do výrobního procesu (tj. výrobními faktory) a jeho výstupy budeme modelovat funkcemi. Nejobecnějším pojmem, který si v souvislosti s rozhodováním výrobců můžeme zavést, je transformační funkce.

8.2 Transformační funkce

Transformační funkce je jedním z nejobecnějších pojmů, které v teorii spotřebitele používáme pro popis vztahu mezi vstupy a výstupy výrobního procesu konkrétní firmy (jako synonymum firmy budeme v této kapitole používat pojem výrobce nebo producent – významově tedy mezi těmito pojmy nečiníme v této kapitole žádný rozdíl). Nacházíme-li se v situaci, kdy firmy z několika vstupů vyrábí obecně několik výstupů, můžeme vzájemný vztah vstupů a výstupů výrobního procesu popsat pro konkrétního producenta A pomocí následující rovnice:

$$T_A(X_1^A, \ldots, X_m^A) = 0, \tag{8.1}$$

kde A je index konkrétního producenta a X_i^A označuje množství i-tého statku, který se buď jako vstup nebo jako výstup účastní výrobního procesu producenta A.[1] Jinak řečeno, transformační funkci můžeme zapsat s rozlišením vstupů a výstupů

$$T_A(\text{vstup}_1^A, \ldots, \text{vstup}_n^A, \text{výstup}_{n+1}^A, \ldots, \text{výstup}_m^A) = 0, \tag{8.2}$$

nebo také

$$f_A(\text{vstup}_1^A, \ldots, \text{vstup}_n^A) = (\text{výstup}_{n+1}^A, \ldots, \text{výstup}_m^A) \tag{8.3}$$

což popisuje produkční proces s n vstupy a $m-n$ výstupy. Jestliže poněkud zúžíme pohled a budeme předpokládat pouze jediný výstup výrobního procesu, dostaneme tzv. *produkční funkci*.

8.3 Produkční funkce

Produkční funkce je tedy funkce, která popisuje vztah mezi jedním konkrétním výstupem a až n vstupy potřebnými k jeho výrobě. Jak asi každého napadne, takto popsaný vztah může vypadat všelijak – záleží přirozeně také na tom, jak efektivní je přeměna vstupů na výstupy. Budeme-li plýtvat vstupy, můžeme totéž množství výstupu vyprodukovat i s několikanásobně vyššími nároky na vstupy, než při optimalizované a naprosto efektivní výrobě.

V klasickém chápání proto popisuje *produkční funkce* (např. podle Samuelsona a Nordhause) vztah mezi **maximálním množstvím** výstupu, které lze vyrobit danou výrobní technologií za daných podmínek, a vstupy potřebnými k výrobě ta-

[1] Pro jednoduchost a pro snazší nalezení souvislosti s analýzou aktivit můžeme předpokládat, že $X_i^A > 0$ v (8.1) značí *výstup* výrobního procesu producenta A, $X_i^A < 0$ značí *vstup* výrobního procesu producenta A a $X_i^A = 0$ označuje statek, který se výrobního procesu producenta A *neúčastní*.

kovéhoto výstupu. Výstupy jsou přitom také dány stavem poznání, dostupnými přístroji atd. Uvědomme si, že koncept produkční funkce v sobě tedy zahrnuje v jistém smyslu *efektivnost (optimalitu)*. Předpokládáme, že produkční funkce popisuje maximální množství výstupu dosažitelné s danými vstupy. Uvažujeme několik vstupů do výrobního procesu – v kontextu produkce často označovaných jako *výrobní faktory* (nejčastěji v ekonomii uvažujeme práci (L) a kapitál (K)) a jediný výstup (množství statku X, označované q_X). Následující vztah reprezentuje obecný tvar produkční funkce

$$q_X = f(VF_1, \ldots, VF_n) \tag{8.4}$$

kde $(VF_1, \ldots, VF_n)$ je nenulový (dokonce nezáporný) vektor n výrobních faktorů. Obvykle předpokládáme, že produkční funkce má následující vlastnosti:

- **Je nezáporná** – tj. nenulový vektor vstupů produkuje kladný nebo nejhůře nulový výstup. Formálně zapsáno:

  $$(VF_1, \ldots, VF_n) > \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad f(VF_1, \ldots, VF_n) \geq 0. \tag{8.5}$$

  Tato vlastnost mimo jiné připouští, že je možné z nenulových vstupů nevyprodukovat nic, tj. umožňuje volné zbavování se vstupů (anglicky free disposability of inputs).
- **Je konečná** – tj. množství vyprodukovaného výstupu je vždy konečné:

  $$f : \langle 0, \infty) \to \langle 0, k \rangle, \quad k \in \mathbb{R} \tag{8.6}$$

  nebo také

  $$\exists k \in \mathbb{R} : \quad f(VF_1, \ldots, VF_n) \leq k \quad \text{pro každé } (VF_1, \ldots, VF_n) > \mathbf{0}. \tag{8.7}$$

  Jinými slovy tento předpoklad říká, že v daném čase je možné vyprodukovat jen omezené množství výstupu (bez ohledu na množství vstupů).
- **Má spojité parciální derivace alespoň druhého řádu** a platí:

  $$f_i = \frac{\partial f(VF_1, \ldots, VF_n)}{\partial VF_i} > 0, \text{ pro každé } i = 1, \ldots, n \tag{8.8}$$

  a

  $$f_{ii} = \frac{\partial^2 f(VF_1, \ldots, VF_n)}{\partial VF_i^2} < 0, \text{ pro každé } i = 1, \ldots, n. \tag{8.9}$$

  Vztah (8.8) říká, že s nárůstem spotřebovávaného množství každého výrobního faktoru naroste vyrobené množství daného statku X (jinak řečeno, produkční funkce je rostoucí ve všech výrobních faktorech). De facto jde o analogii axiomu nenasycení z teorie spotřebitele. Navýšením spotřeby některého z výrobních faktorů dojde k navýšení produkce.
  Vztah (8.9) říká, že při fixním množství všech výrobních faktorů kromě VF_i je výrobní funkce konkávní (tedy produktivitní funkce každého výrobního faktoru je konkávní – o produktivitních funkcích si řekneme více v další sekci této

kapitoly). Tato podmínka je analogií předpokladu klesajícího mezního užitku v teorii spotřebitele. Z (8.8) víme, že navýšením libovolného výrobního faktoru dojde k navýšení produkce, z (8.9) zase víme, že každá další jednotka daného výrobního faktoru navyšuje produkci stále méně a méně.

Homogenní funkce, které splňují podmínky (8.5) až (8.9), se nazývají *neoklasické produkční funkce*. Pokud ve vztahu (8.9) připustíme na nějakém intervalu definičního oboru opačnou nerovnost (tj. na části definičního oboru bude produktivitní funkce moci být konvexní), získáváme *klasickou produkční funkci*.

V dalším textu budeme pro jednoduchost uvažovat pouze dva výrobní faktory – práci a kapitál. Produkční funkci můžeme tedy psát ve tvaru:

$$q_X = f(K,L). \tag{8.10}$$

Opět toto zjednodušení na pouze dva vstupy (výrobní faktory) činíme především pro zjednodušení grafické reprezemtace jednotlivých pojmů, které si zavedeme dále. Zobecnění pro více vstupů (výrobních faktorů) není nijak náročné.

8.4 Produktivitní funkce

Produkční funkci popsanou vztahem (8.10) můžeme analyzovat několika způsoby. Nejjednodušším způsobem je pohled z *perspektivy krátkého období*, kdy můžeme předpokládat, že jeden z výrobních faktorů je neměnný. Uvažujeme-li, že neměnným výrobním faktorem je kapitál, dostáváme tzv. *produktivitní funkci práce* nebo též *celkovou produktivitu práce* (8.11), která popisuje celkový fyzický produkt práce za předpokladu, že kapitál se nemění. Obdobně můžeme získat *celkovou produktivitu kapitálu* (8.12) (za předpokladu konstantního množství práce). Příklady produktivitních funkcí práce a kapitálu a jejich souvislost s produkční funkcí prezentuje obrázek 8.1.

$$TP_L = f(K,L)\big|_{K=k;\, k\in\mathbb{R}} = f(L) \tag{8.11}$$

$$TP_K = f(K,L)\big|_{L=k;\, k\in\mathbb{R}} = f(K) \tag{8.12}$$

Produktivitní funkce jsou tedy krátkodobými produkčními funkcemi, přičemž častěji v krátkém období považujeme za neměnné množství kapitálu (tj. například strojů). S využitím znalostí o průměrných a mezních veličinách můžeme odvodit *průměrnou produktivitu práce* (8.13) a *kapitálu* (8.14):

$$AP_L = \frac{TP_L}{L} \tag{8.13}$$

$$AP_K = \frac{TP_K}{K} \tag{8.14}$$

Tyto veličiny popisují, jaké množství produkce připadá (v průměru) na každou jednotku variabilního vstupu. Jinými slovy, např. (8.13) popisuje, kolik jednotek výstupu připadá na jednu jednotku práce při dané (neměnné) úrovni kapitálu.

Pro účely rozhodování je vhodné nadefinovat i *mezní produktivitu práce* (8.15) resp. *kapitálu* (8.16):

$$MP_L = \frac{dTP_L}{dL} = \left.\frac{\partial f(K,L)}{\partial L}\right|_{K=k;\, k\in\mathbb{R}} \tag{8.15}$$

$$MP_K = \frac{dTP_K}{dK} = \left.\frac{\partial f(K,L)}{\partial K}\right|_{L=k;\, k\in\mathbb{R}} \tag{8.16}$$

Mezní produktivity popisují, jaký nárůst produkce (množství vyprodukovaného statku X) můžeme očekávat, zvýšíme-li množství daného výrobního faktoru o jednotku. Oba vztahy (8.15) a (8.16) můžeme přirozeně uvažovat i v diskrétní podobě (8.17) a (8.18) (která může být vhodnější při interpretaci „navyšování výrobních faktorů o jednotku“ a která je nezbytná u výrobních faktorů, které nejsou nekonečně dělitelné).

$$MP_L = \frac{\Delta TP_L}{\Delta L} = \left.\frac{\Delta f(K,L)}{\Delta L}\right|_{K=k;\, k\in\mathbb{R}} \tag{8.17}$$

$$MP_K = \frac{\Delta TP_K}{\Delta K} = \left.\frac{\Delta f(K,L)}{\Delta K}\right|_{L=k;\, k\in\mathbb{R}} \tag{8.18}$$

Na základě podmínky (8.8) očekáváme, že $MP_L > 0$ a také $MP_K > 0$.

Mezní produktivita práce nebo kapitálu nám na mikroekonomické úrovni podává informaci potřebnou např. pro rozhodování o nákupu strojů, zaměstnávání dalších lidí atd. Říká nám totiž, jaký nárůst objemu produkce můžeme očekávat, jestliže navýšíme, ceteris paribus, některý z výrobních faktorů o jednotku oproti současnému stavu. Na makroekonomické úrovni popisují MP_L a MP_K ekonomickou efektivnost výrobních faktorů v konkrétních podmínkách. Doplňme ještě, že jak mezní, tak průměrná produktivita, zůstává závislá na jednotkách, v nichž vyjadřujeme množství výrobních faktorů.

8.5 Izokvanty

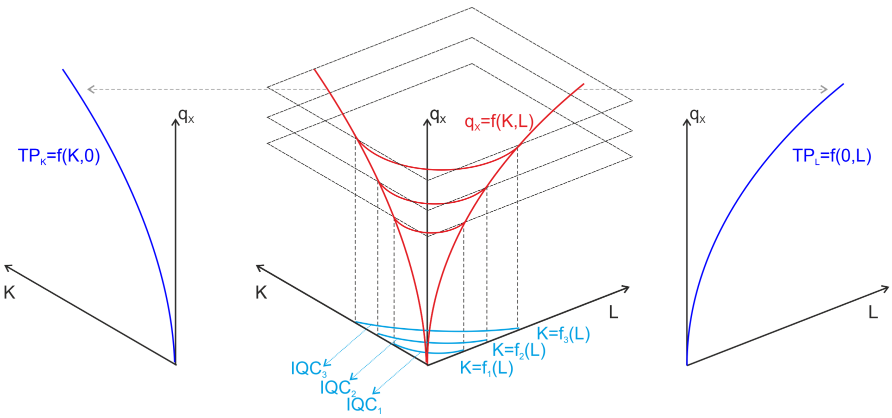
Jakmile zobecníme svou analýzu na dlouhé období, je třeba zvolit jiný přístup ke znázornění produkční funkce. Klasicky můžeme analyzovat přímo funkci dvou proměnných (8.10) nebo její obecnější variantu (8.4). Už pro funkci dvou proměnných, jako je (8.10), však potřebujeme trojrozměrnou grafickou reprezentaci. Produkční funkci více proměnných (výrobních faktorů) pak může být ještě obtížnější graficky reprezentovat (neboť její grafické znázornění vyžaduje $n+1$ dimenzí, kde n je počet výrobních faktorů).

Pojďme se tedy pro jednoduchost zaměřit na produkční funkci (8.10) předpokládající jen dva výrobní faktory. V této situaci můžeme také, obdobně jako u funkce užitku, využít průmětů vrstevnic funkce (8.10) do roviny (K,L). Těmto křivkám popsatelným pro úroveň výstupu (produkce) h vztahem (8.19) říkáme *izokvanty* (*IQC* z anglického Iso-Quant Curve).

$$ICQ_h = \{(K,L)|q_X = f(K,L) = h\} \tag{8.19}$$

Příklady izokvant a jejich odvození z produkční funkce ilustruje obrázek 8.1.

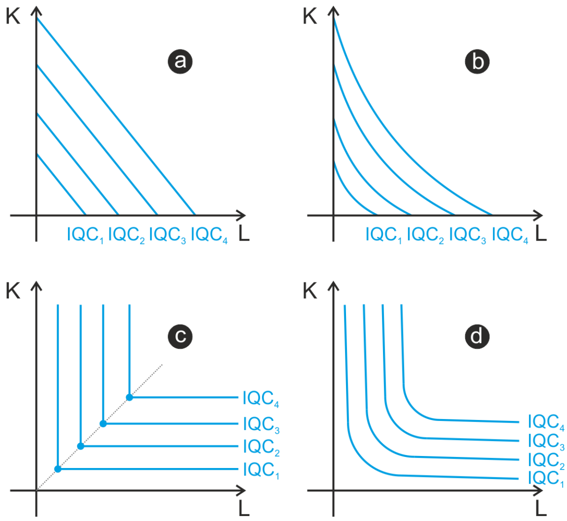
Izokvanta ICQ_h je tedy množinou všech kombinací K a L, jejichž využitím je možné jako maximální výstup dostat h jednotek produkovaného statku X, tj. vyrobit maximálně $q_x = h$.



Obrázek 8.1 Produkční funkce popisující produkci statku X, $q_X = f(K,L)$, červeně uprostřed. Průměty jejích vrstevnic do roviny (K,L) tvoří izokvantovou mapu složenou z izokvant IQC_1, IQC_2 a IQC_3 (světle modrá v prostředním grafu). Pravý graf reprezentuje produktivitní funkci práce (celkovou produktivitu práce) pro $K = 0$, tj. $TP_L = f(0,L) = q_x$. Levý graf reprezentuje produktivitní funkci kapitálu (celkovou produktivitu kapitálu) pro $L = 0$, tj. $TP_K = f(K,0) = q_x$.

Produkční funkci (8.10) tedy můžeme reprezentovat dvojrozměrnou izokvantovou mapou (viz obrázek 8.2). To, jestli bude izokvanta hladkou křivkou, ovlivňuje jak charakter výroby, tak i dělitelnost výrobních faktorů (v případě výrobních faktorů, které nejsou nekonečně dělitelné, nemusí izokvanty být spojité). Mezi typické tvary izokvant patří:

- Izokvanty odpovídající **komplementární produkční funkci** (křivky zalomené v úhlu $90°$) – v tomto případě jsou výrobní faktory vzájemně nenahraditelné (jsou dokonalými komplementy). K využití konkrétního množství K je nutné přesně dané množství L. Zvýšení jednoho výrobního faktoru bez proporcionálního zvýšení druhého nevede k růstu celkové produkce (viz obrázek 8.2, graf c).



Obrázek 8.2 Izokvantové mapy pro různé výrobní procesy. Ve výrobním procesu a) jsou K a L dokonalými substituty, jeden výrobní faktor je plně nahraditelný druhým; ve výrobním procesu b) jsou K a L blízkými substituty; ve výrobním procesu c) jsou K a L dokonalými komplementy (modré body znázorňují optimální kombinace K a L); ve výrobním procesu d) jsou K a L blízkými komplementy.

- Izokvanty odpovídající **substituční produkční funkci** – ta umožňuje vzájemnou nahraditelnost výrobních faktorů. Je dobré si uvědomit, že při dokonalé nahraditelnosti (substituovatelnosti) K a L, kdy IQC mají tvar přímek se zápornou směrnicí, není splněna podmínka (8.9), a nemůže tedy jít o neoklasickou produkční funkci (viz obrázek 8.2, graf a).
- Nejčastěji uvažujeme produkční funkci nacházející se mezi zmíněnými dvěma póly. Takovouto produkční funkci (která není ani dokonale komplementární, ani dokonale substituční) budeme nazývat **částečně substituční**. Jde o produkční funkci, kde výrobní faktory sice jsou nahraditelné, ale obvykle každá další nahrazená jednotka jednoho výrobního faktoru spotřebuje více a více výrobního faktoru druhého. Na obrázku 8.2 je v grafu b uveden příklad indiferenční mapy odpovídající produkční funkci, kde K a L jsou blízkými substituty (b) a kde jsou blízkými komplementy (d).

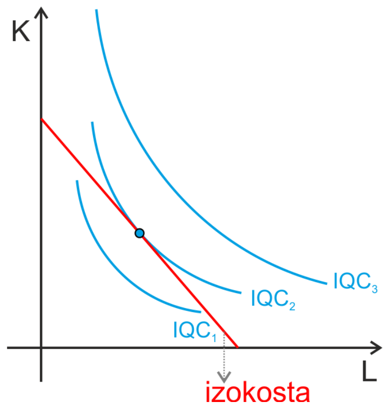
Nabízí se nyní otázka, jak při daném množství finančních prostředků tyto rozdělit mezi výrobní faktory, abychom mohli dosáhnout co nejvyšší produkce. Tato situace je analogická hledání optima spotřebitele v teorii spotřebitele. Zaveďme si pojem *izokosta* (IK), který bude popisovat množinu všech kombinací množství námi uvažovaných výrobních faktorů, jež je možné pořídit za stejnou cenu, tedy:

$$IK_r = \left\{(K,L) \in \mathbb{R}^2 | p_K \cdot K + p_L \cdot L = r, r \geq 0, r \in \mathbb{R}\right\}, \tag{8.20}$$

kde p_K je cena jednotky kapitálu a p_L je cena jednotky práce. Izokosty budou v našich úvahách hrát úlohu podobnou úloze rozpočtového omezení (budget line) v teorii spotřebitele. Ze vztahu (8.20) plyne, že izokostu můžeme pro danou úroveň prostředků r (a dané ceny výrobních faktorů p_k a p_L) vyjádřit jako funkci práce (8.21), což je přímka se zápornou směrnicí.

$$IK_R: \quad K = f(L) = \frac{r - p_L \cdot L}{p_K} \tag{8.21}$$

Předpokládáme-li, že „racionální“ výrobce investuje všechny své prostředky do výrobních faktorů, pak optimální kombinaci množství práce a kapitálu (v tom smyslu, že umožní vyrobit nejvyšší množství výstupu) najdeme v bodě, kdy splývá tečna izokosty a některé z izokvant (viz obrázek 8.3, který je analogií hledání optima v teorii spotřebitele). Takovýto přístup ovšem předpokládá „racionálního“ výrobce, tedy existenci jakéhosi efektivního manažera, který se snaží o maximalizaci množství výstupu při maximálním dosažitelném množství výrobních faktorů za daného rozpočtového omezení.



Obrázek 8.3 Hledání optima výrobce z pohledu využití daného množství finančních prostředků na nákup výrobních faktorů K a L tak, aby bylo dosaženo maximální možné produkce. Produkční funkce je reprezentována izokvantovou mapou. Rozpočtové omezení, závislé na dostupných finančních prostředcích a cenách p_K a p_L jednotlivých výrobních faktorů, je reprezentováno izokostou – v grafu červeně. Optimum je v bodě, kde izokosta je tečná izokvantě.

8.6 Koeficienty elasticity produkce, výnosy z rozsahu

Má smysl také sledovat, jak reaguje produkční funkce (konkrétně množství vyráběného statku q_X) na změnu množství jednotlivých výrobních faktorů K a L. Vhodným nástrojem pro takovouto analýzu jsou koeficienty pružnosti (elasticity). Ty, jak jsme si obecně definovali již dříve v kapitole 3, popisují, jak velkou relativní změnu vyráběného množství vyvolá relativní změna některého z výrobních faktorů.

8.6.1 Koeficient elasticity produkce vzhledem ke kapitálu

Jak jeho jméno napovídá, *koeficient elasticity produkce vzhledem ke kapitálu* (ozn. E_{P_K}) popisuje, jakou relativní změnu produkovaného množství q_X vyvolá relativní změna spotřebovávaného kapitálu (o jedno procento). Vztah (8.22) popisuje pružnost produkce vzhledem ke kapitálu pro případ nekonečně malých (spojitých) změn množství kapitálu, vztah (8.23) zohledňuje i větší než nekonečně malé změny.

$$E_{P_K} = \frac{\frac{\partial q_X}{q_X}}{\frac{\partial K}{K}} = \frac{\frac{\partial TP_K}{TP_K}}{\frac{\partial K}{K}} = \frac{\partial TP_K}{\partial K} \cdot \frac{K}{TP_K} = \frac{MP_K}{AP_K} \stackrel{ozn.}{=} \alpha \tag{8.22}$$

$$E_{P_K} = \frac{\frac{\Delta q_X}{q_X}}{\frac{\Delta K}{K}} = \frac{\frac{q_{X_2} - q_{X_1}}{\frac{q_{X_2} + q_{X_1}}{2}}}{\frac{K_2 - K_1}{\frac{K_2 + K_1}{2}}} = \frac{\frac{\Delta TP_K}{TP_K}}{\frac{\Delta K}{K}} = \frac{\Delta TP_K}{\Delta K} \cdot \frac{K}{TP_K} = \frac{MP_K}{AP_K} \stackrel{ozn.}{=} \alpha \tag{8.23}$$

Ze vztahů (8.22) a (8.23) navíc můžeme odvodit další vztah pro určení mezní produktivity kapitálu:

$$MP_K = \alpha \cdot AP_K = \alpha \cdot \frac{q_X}{K}. \tag{8.24}$$

8.6.2 *Koeficient elasticity produkce vzhledem k práci*

Analogicky můžeme zavést elasticitu produkce také vzhledem ke druhému námi uvažovanému výrobnímu faktoru – práci – pro spojitý případ pomocí (8.25), pro diskrétní případ pomocí (8.26). *Elasticita produkce vzhledem k práci* popisuje, jakou relativní změnu celkové produkce q_X vyvolá relativní změna práce L (o jedno procento).

$$E_{P_L} = \frac{\frac{\partial q_X}{q_X}}{\frac{\partial L}{L}} = \frac{\frac{\partial TP_L}{TP_L}}{\frac{\partial L}{L}} = \frac{\partial TP_L}{\partial L} \cdot \frac{L}{TP_L} = \frac{MP_L}{AP_L} \stackrel{ozn.}{=} \beta \tag{8.25}$$

$$E_{P_L} = \frac{\frac{\Delta q_X}{q_X}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\frac{q_{X_2} - q_{X_1}}{\frac{q_{X_2} + q_{X_1}}{2}}}{\frac{L_2 - L_1}{\frac{L_2 + L_1}{2}}} = \frac{\frac{\Delta TP_L}{TP_L}}{\frac{\Delta L}{L}} = \frac{\Delta TP_L}{\Delta L} \cdot \frac{L}{TP_L} = \frac{MP_L}{AP_L} \stackrel{ozn.}{=} \beta \tag{8.26}$$

Také určení *mezní produktivity práce* je přímou analogií předchozí podsekce:

$$MP_L = \beta \cdot AP_L = \alpha \cdot \frac{q_X}{L}. \tag{8.27}$$

Když máme zavedeny vztahy pro obě elasticity, můžeme přikročit k zavedení pojmu výnosy z rozsahu výroby. Tento pojem v teorii výrobce popisuje, jestli s nárůstem produkce klesají nebo rostou průměrné náklady na každou jednotku produkce.

8.6.3 Výnosy z rozsahu výroby

Začneme formální definicí výnosů z rozsahu. *Výnosem z rozsahu výroby* obecné produkční funkce $q_x = f(K,L)$ v bodě (K_0,L_0) nazveme hodnotu funkce (8.28) v tomto bodě.

$$\omega(K,L) = \frac{\partial q_X}{\partial K} \cdot \frac{K}{q_X} + \frac{\partial q_X}{\partial L} \cdot \frac{L}{q_X} = \frac{MP_K}{AP_K} + \frac{MP_L}{AP_L} = \alpha + \beta \tag{8.28}$$

Hodnota $\alpha + \beta$ nám říká, jestli výnosy z rozsahu jsou rostoucí, klesající, nebo konstantní. Uvědomme si, že $\alpha + \beta$ udává, jaký je nárůst produkce oproti výchozímu stavu (vyjádřený relativně, tj. v procentech), jestliže spotřeba obou výrobních faktorů naroste o jedno procento. Alternativně můžeme výnosy z rozsahu definovat jako stupeň homogenity produkční funkce $q_X = f(K,L)$, tj. jako hodnotu r ve výrazu (8.29), za předpokladu, že produkční funkce je homogenní.

$$q_X = f(\lambda \cdot K, \lambda \cdot L) = \lambda^r \cdot f(K,L) \tag{8.29}$$

Potom platí následující:

- Pro $r > 1$ máme *rostoucí výnosy z rozsahu*. Jde o situaci, kdy s růstem produkce klesají průměrné náklady a proto rostou jednotkové výnosy. (Analogicky bychom mohli usuzovat při vysoké hodnotě $\alpha + \beta$.)
- Pro $r = 1$ máme *konstantní výnosy z rozsahu*. Jde o situaci, kdy s růstem produkce průměrné náklady i jednotkové výnosy zůstávající neměnné.
- Pro $r < 1$ máme *klesající výnosy z rozsahu*. Jde o situaci, kdy s růstem produkce rostou průměrné náklady a jednotkové výnosy se tak snižují. (Analogicky bychom mohli usuzovat při velmi nízké hodnotě $\alpha + \beta$.)

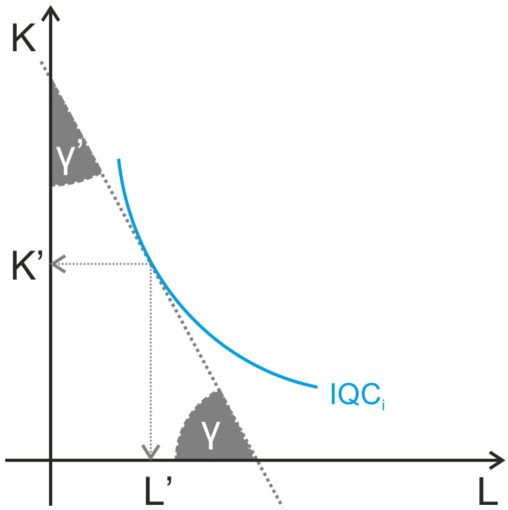
8.7 Charakteristiky popisující vztahy mezi výrobními faktory

Máme již dobře popsány vztahy jednotlivých výrobních faktorů (jejich množství) a rozsahu výroby (množství vyrobených kusů statku X). Pro účely rozhodování je důležité také vědět, jsou-li výrobní faktory vzájemně nahraditelné a jakým množstvím jednoho výrobního faktoru můžeme kompenzovat pokles množství druhého výrobního faktoru o jednotku. Právě tuto informaci nám podává mezní míra substituce.

8.7.1 Mezní míra technické substituce

Na tomto místě si odvodíme, v jakém poměru můžeme nahrazovat práci kapitálem, tj. *mezní míru technické substituce práce kapitálem* (ozn. $MRTS_{LK}$, z anglického Marginal Rate of Technical Substitution), i kapitál prací, tj. *mezní míru tech-*

nické substituce kapitálu prací (ozn. $MRTS_{KL}$). Výchozím předpokladem je, že chceme zachovat stejnou úroveň výstupu. Přitom předpokládáme, že dojde ke snížení množství jednoho výrobního faktoru, jež se budeme snažit kompenzovat nárůstem množství druhého výrobního faktoru. Tuto situaci shrnuje vztah (8.30), který je vyjádřením skutečnosti, že totální diferenciál produkční funkce (tj. celková změna produkce vyvolaná změnou K a L) je roven nule.



Obrázek 8.4 Mezní míra technické substituce práce kapitálem v bodě (L',K') je dána jako $MRTS_{LK} = \frac{dK}{dL} = \mathrm{tg}(\gamma')$, jde tedy o směrnici tečny k IQC_i v daném bodě. Mezní míra technické substituce kapitálu prací v bodě (L',K') je dána jako $MRTS_{KL} = \frac{dL}{dK} = \mathrm{tg}(\gamma)$, jde tedy o směrnici tečny k IQC_i v daném bodě.

$$dq_X = \frac{\partial q_X}{\partial K} \cdot dK + \frac{\partial q_X}{\partial L} \cdot dL = 0 \tag{8.30}$$

Nejdříve nás bude zajímat, jak popsat mezní míru technické substituce práce kapitálem $MRTS_{LK}$, tj. poměr, v němž můžeme nahrazovat práci kapitálem. Jde tedy o to, jaký nárůst spotřeby kapitálu vyvolá daný pokles spotřeby práce. Předpokládáme-li, že L a K jsou alespoň částečnými substituty (pokud by byly dokonalými komplementy, je jejich nahraditelnost nulová), pak $MRTS_{LK} < 0$, a můžeme intuitivně psát, že $MRTS_{LK} = -dK/dL$. Z (8.30) tak dostáváme:

$$MRTS_{LK} = -\frac{dK}{dL} = \frac{MP_L}{MP_K}. \tag{8.31}$$

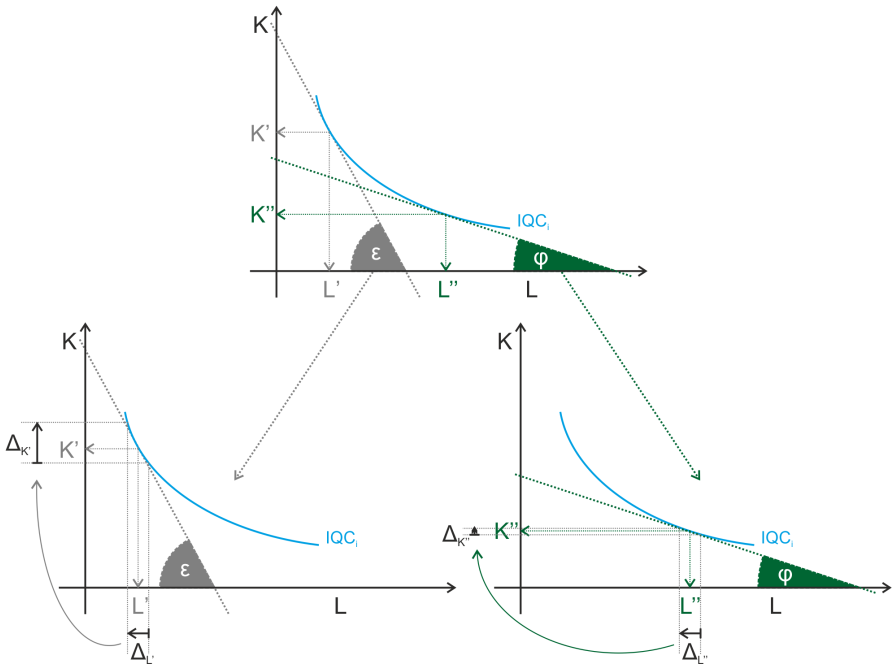
Je tedy zřejmé, že graficky je $MRTS_{LK}$ možné reprezentovat jako směrnici tečny k produkční funkci (případně k IQC) v daném bodě – viz obrázek 8.4. Analogickým způsobem můžeme odvodit také mezní míru technické substituce kapitálu prací

$$MRTS_{KL} = -\frac{dL}{dK} = \frac{MP_K}{MP_L}. \tag{8.32}$$

Ze vztahů (8.31) a (8.32) vyplývá, že

$$MRTS_{LK} \cdot MRTS_{KL} = \frac{MP_L}{MP_K} \cdot \frac{MP_K}{MP_L} = 1. \tag{8.33}$$

Jestliže je v daném bodě produkční funkce mezní míra technické substituce jednoho výrobního faktoru druhým velká, pak malá změna jednoho faktoru (např. pokles) si vyžádá velkou změnu (nárůst) faktoru druhého, aby byl zachován stejný objem produkce. Jestliže je mezní míra technické substituce malá, pak je možná kompenzace změny jednoho výrobního faktoru i malou změnou druhého výrobního faktoru. Situaci ilustruje obrázek 8.5.



Obrázek 8.5 Interpretace hodnoty $MRTS_{KL}$ ve dvou bodech IQC_i. V prvním bodě určeném kapitálem K' a prací L' je $MRTS_{KL}$ vysoká, proto $\Delta_{L'} << \Delta_{K'}$ (šedá barva, levý dolní graf). V druhém bodě určeném kapitálem K'' a prací L'' je $MRTS_{KL}$ nízká, proto $\Delta_{L''} >> \Delta_{K''}$ (zelená barva, pravý dolní graf).

8.7.2 Koeficient elasticity substituce výrobních faktorů

Koeficient elasticity substituce výrobních faktorů, ozn. σ_{LK}, popisuje, jakou relativní (procentní) změnu poměru množství dvou výrobních faktorů vyvolá relativní (jednoprocentní) změna mezní míry technické substituce:

$$\sigma_{LK} = \frac{\frac{d\frac{K}{L}}{\frac{K}{L}}}{\frac{dMRTS_{LK}}{MRTS_{LK}}} = \frac{d\left(\ln\frac{K}{L}\right)}{d\left(\ln MRTS_{LK}\right)}. \tag{8.34}$$

Přitom platí, že $\sigma_{LK} = \sigma_{KL}$. Vzájemně nenahraditelným výrobním faktorům odpovídá situace, kdy $\sigma_{LK} \to 0$, jednoduchou vzájemnou nahraditelnost výrobních faktorů pak popisuje $\sigma_{LK} \to \infty$.

8.8 Cobb-Douglasova produkční funkce (CDPF)

Produkční funkce může obecně nabývat různých podob. My se v této kapitole zaměříme na jeden její konkrétní možný tvar uvedený do ekonomie Cobbem a Douglasem v roce 1928. Tento tvar produkční funkce je relativně jednoduchý a pomůže nám lépe pochopit veličiny, které jsme si odvozovali obecně v prvních částech této kapitoly. Vysvětlíme si také blíže na příkladu pojem výnosy z rozsahu a jeho souvislost s produkční funkcí. V závěru této části si také ukážeme, jak je možné odvodit produkční funkci z dat s využitím lineární regrese.

Cobb-Douglasovou produkční funkcí nazýváme funkci ve tvaru (8.35), kde $a, \alpha, \beta > 0$ jsou parametry.

$$q_X = f(K,L) = a \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta} \tag{8.35}$$

Přitom a souvisí s jednotkami, v nichž jsou dány jednotlivé výrobní faktory K a L, souvisí také s efektivností výrobního procesu. Máme-li dva výrobní procesy, které se liší jen hodnotou a, pak ten, který má vyšší a, je efektivnější. To je zřejmé, protože dokáže vyrobit stejný výstup z menšího množství vstupů.

8.8.1 Charakteristiky CDPF

Nyní si odvodíme konkrétní charakteristiky popisující Cobb-Douglasovu produkční funkci, a to s využitím vzorců zavedených v první části této kapitoly. Začneme *mezní produktivitou kapitálu* (8.16):

$$MP_K = \frac{\partial q_X}{\partial K} = \frac{\partial(a \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta})}{\partial K} = \alpha \cdot \frac{a \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}}{K} = \alpha \cdot \frac{q_X}{K} = \alpha \cdot AP_K. \tag{8.36}$$

Analogicky můžeme vypočítat také *mezní produktivitu práce* s využitím (8.15):

$$MP_L = \frac{\partial q_X}{\partial L} = \frac{\partial(a \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta})}{\partial L} = \beta \cdot \frac{a \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}}{L} = \beta \cdot \frac{q_X}{L} = \beta \cdot AP_L. \tag{8.37}$$

Nyní můžeme najít interpretaci koeficientů α a β vystupujících v předpisu CDPF. Začněme interpretací koeficientu α – ze vztahu (8.36) víme, že platí $MP_K = \alpha \cdot AP_K$, a tedy:

$$\alpha = \frac{MP_K}{AP_K} = \frac{\partial q_X}{\partial K} \cdot \frac{K}{q_X} = E_{P_K}. \tag{8.38}$$

Koeficient α tedy pro CDPF odpovídá *koeficientu elasticity produkce vzhledem ke kapitálu*. Obdobně bychom z (8.37) odvodili, že koeficient β reprezentuje *elasticitu produkce vzhledem k práci*, tj. že platí

$$\beta = \frac{MP_L}{AP_L} = \frac{\partial q_X}{\partial L} \cdot \frac{L}{q_X} = E_{P_L}. \tag{8.39}$$

Chceme-li, aby CDPF byla *neoklasickou produkční funkcí*, musí pro ni určitě platit podmínka (8.9). Musí tedy být splněno, že

$$\frac{\partial^2 q_X}{\partial K^2} < 0 \quad \text{a zároveň} \quad \frac{\partial^2 q_X}{\partial L^2} < 0. \tag{8.40}$$

Když si jednotlivé vztahy v (8.40) rozepíšeme, získáme podmínky:

$$\frac{\partial^2 q_X}{\partial K^2} = \frac{\partial^2 \left(a \cdot K^\alpha \cdot L^\beta\right)}{\partial K^2} = a \cdot \alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot K^{\alpha-2} \cdot L^\beta < 0 \tag{8.41}$$

a

$$\frac{\partial^2 q_X}{\partial L^2} = \frac{\partial^2 \left(a \cdot K^\alpha \cdot L^\beta\right)}{\partial L^2} = a \cdot K^\alpha \cdot \beta \cdot (\beta - 1) \cdot L^{\beta-2} < 0. \tag{8.42}$$

Po jednoduchých úpravách z nich dostaneme ekvivalentní podmínky:

$$\frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot a \cdot K^\alpha \cdot L^\beta}{K^2} = \frac{\alpha \cdot (\alpha - 1) \cdot q_X}{K^2} < 0 \tag{8.43}$$

a

$$\frac{\beta \cdot (\beta - 1) \cdot a \cdot K^\alpha \cdot L^\beta}{L^2} = \frac{\beta \cdot (\beta - 1) \cdot q_X}{L^2} < 0. \tag{8.44}$$

Jelikož $a, \alpha, \beta > 0$, a také $q_X \geq 0$, můžeme snadno nahlédnout, že podmínka (8.43) je splněna jen pro $\alpha < 1$ a podmínka (8.44) zase pro $\beta < 1$. Pro neoklasickou produkční funkci CDPF tedy z platnosti podmínek (8.4)–(8.9) vyplývá, že $0 < \alpha < 1$ a $0 < \beta < 1$. Neoklasická CDPF je tedy neelastická vzhledem k oběma výrobním faktorům.

Vypočítejme si dále *mezní míry technické substituce* jednoho výrobního faktoru druhým s využitím (8.31) a (8.32) a také (8.36) a (8.37):

$$MRTS_{LK} = \frac{MP_L}{MP_K} = \frac{\beta \cdot AP_L}{\alpha \cdot AP_K} = \frac{\beta \cdot q_X \cdot \frac{1}{L}}{\alpha \cdot q_X \cdot \frac{1}{K}} = \frac{\beta}{\alpha} \cdot \frac{K}{L} \tag{8.45}$$

$$MRTS_{KL} = \frac{MP_K}{MP_L} = \frac{\alpha \cdot AP_K}{\beta \cdot AP_L} = \frac{\alpha \cdot q_X \cdot \frac{1}{K}}{\beta \cdot q_X \cdot \frac{1}{L}} = \frac{\alpha}{\beta} \cdot \frac{L}{K}. \tag{8.46}$$

kde K/L nazýváme *kapitálovou vybaveností práce* a L/K *pracovní vybaveností kapitálu*. Vztah (8.45) např. říká, že čím vyšší je $MRTS_{LK}$, tím více kapitálu je zapotřebí pro nahrazení jedné jednotky práce.

Zbývá nám určit koeficient elasticity substituce výrobních faktorů. Ten je dle vzorce (8.34) pro CDPF popsán vztahem (8.47):

$$\sigma_{LK} = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln(MRTS_{LK})} = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{K}{L}\right)} = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\cdot\frac{K}{L}\right)} = \frac{d\ln\left(\frac{K}{L}\right)}{d\ln\left(\frac{\beta}{\alpha}\right)+d\ln\left(\frac{K}{L}\right)} = 1, \tag{8.47}$$

jelikož $\frac{\beta}{\alpha}$ je konstanta a její derivace je vždy rovna nule. Elasticita substituce výrobních faktorů je tedy pro CDPF vždy jednotková. Jaká je další možná interpretace a využití hodnot α a β? Kdybychom předpokládali, že CDPF je homogenní produkční funkcí stupně r, pak musí platit, že:

$$f(\lambda\cdot K,\lambda\cdot L) = \lambda^r \cdot f(K,L), \tag{8.48}$$

což pro CDPF znamená:

$$f(\lambda\cdot K,\lambda\cdot L) = a\cdot(\lambda\cdot K)^{\alpha}\cdot(\lambda\cdot L)^{\beta} = a\cdot\lambda^{\alpha+\beta}\cdot K^{\alpha}\cdot L^{\beta}. \tag{8.49}$$

Je tedy zřejmé, že stupeň homogenity CDPF je $\alpha+\beta$.

- Pro $\alpha+\beta > 1$ tedy CDPF realizuje *rostoucí výnosy z rozsahu,*
- pro $\alpha+\beta = 1$ tedy CDPF realizuje *konstantní výnosy z rozsahu,*
- pro $\alpha+\beta < 1$ tedy CDPF realizuje *klesající výnosy z rozsahu.*

8.8.2 Odvození CDPF z dat

Máme-li např. data od konkrétního výrobce ve tvaru (8.50)

$$\begin{bmatrix} K_1 & L_1 & q_{X,1} \\ K_2 & L_2 & q_{X,2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ K_n & L_n & q_{X,n} \end{bmatrix}, \tag{8.50}$$

kde

- K_i je hodnota kapitálu na konci i-tého roku v daném podniku, $i = 1,\dots,n$,
- L_i je průměrný počet pracovníků v i-tém roce v daném podniku, $i = 1,\dots,n$,
- $q_{X,i}$ je vyrobené množství produktu X za i-tý rok, $i = 1,\dots,n$

tj. víme-li, s jakými množstvími vstupů dosahuje podnik jakých výstupů v jednotlivých letech, můžeme odhadnout parametry Cobb-Douglasovy produkční funkce s využitím *lineární regrese*.

Abychom mohli použít metody lineární regrese, musíme nejdříve CDPF z tvaru (8.35) převést na tvar lineární ve všech parametrech. Toho snadno dosáhneme zlogaritmováním rovnice (8.35) a dostáváme:

$$\ln q_X = \ln\left(a \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}\right) = \ln a + \alpha \cdot \ln K + \beta \cdot \ln L, \tag{8.51}$$

což můžeme přeznačit na

$$\ln q_X = c + \alpha \cdot \ln K + \beta \cdot \ln L. \tag{8.52}$$

Nyní potřebujeme odhadnout hodnoty parametrů c, α, β, ke $c = \ln a$. Odhad vektoru $\hat{\mathbf{b}} = \left(\hat{c}, \hat{\alpha}, \hat{\beta}\right)^T$ získáme snadno využitím vzorce pro lineární regresi:

$$\hat{\mathbf{b}} = \left(\mathbf{X}^T \cdot \mathbf{X}\right)^{-1} \cdot \mathbf{X}^T \cdot \mathbf{Y}, \tag{8.53}$$

kde $\cdot$ značí maticové násobení, ^{T} transpozici vektoru nebo matice, $^{-1}$ inverzi matice,

$$\mathbf{Y} = \begin{pmatrix} \ln q_{X,1} \\ \ln q_{X,2} \\ \vdots \\ \ln q_{X,n} \end{pmatrix} \tag{8.54}$$

a

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} 1 & \ln K_1 & \ln L_1 \\ 1 & \ln K_2 & \ln L_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \ln K_n & \ln L_n \end{pmatrix}. \tag{8.55}$$

Odpovídající CDPF pak s využitím výsledků (8.53) tohoto lineárního regresního modelu můžeme psát ve tvaru

$$q_X = e^{\hat{c}} \cdot K^{\hat{\alpha}} \cdot L^{\hat{\beta}}. \tag{8.56}$$

I když výše uvedený postup je aplikovatelný vždy, je třeba kontrolovat, jsou-li dodrženy předpoklady lineárního regresního modelu; problém může dělat heteroskedasticita, multikolinearita atd. Z tohoto důvodu má smysl blíže se seznámit také se základními statistickými nástroji, jelikož právě jejich využití nám často umožňuje aplikovat teoretické poznatky na praktické problémy.

Shrnutí

Transformační, resp. produkční funkce popisuje transformaci vstupů na výstupy, resp. výstup, v rámci ekonomiky. Neoklasická produkční funkce je nezáporná konečná funkce se spojitými parciálními derivacemi alespoň druhého řádu splňující několik v textu uvedených podmínek. Pro zkoumání produkční funkce je možné využít jak produktivitních funkcí, tak i izokvant. Mezní míra technické substituce kapitálu prací popisuje, v jakém poměru je možné nahrazovat jeden výrobní faktor druhým. Cobb-Douglasovou produkční funkcí (CDPF) rozumíme produkční funkci ve tvaru $q_X = f(K,L) = a \cdot K^{\alpha} \cdot L^{\beta}$. Díky jednoduchému tvaru CDPF je možné její základní charakteristiky vyjádřit relativně jednoduchými výrazy. Je-li produkční funkce homogenní ve stupni 1 (resp. větším než 1, menším než 1), dochází ke konstantním (resp. rostoucím, klesajícím) výnosům z rozsahu. Produkční funkci je v případě, že máme k dispozici vhodná data, možné odvodit z dat. Pro CDPF jsme si nastínili jeden z možných postupů.

Otázky k zamyšlení

- Jak probíhá rozhodování výrobce? Co je cílem výrobců, jaké axiomy platí pro racionálního výrobce?
- Co reprezentují jednotlivé body nabídkové funkce? Jsou v nějakém smyslu optimální? Pokuste se to vysvětlit na příkladu.
- Do jaké míry a jakým způsobem jsou výrobní faktory vzájemně substituovatelné? Uveďte příklad substituce výrobních faktorů. Vysvětlete na příkladu mezní míru substituce výrobních faktorů (MRTS).
- Jakou roli v rozhodování výrobce hraje pojem udržitelnosti? Jakým způsobem bychom mohli udržitelnost reflektovat v modelech rozhodování výrobce? Co je racionální výrobce z pohledu udržitelnosti?
- Jak je možné zjistit jak vypadá produkční funkce? Čím je určeno, jaký je maximální výstup při daném množství vstupů (výrobních faktorů)? Jak je možné tento maximální výstup navýšit?
- Jaké nástroje jsou potřeba k odvození produkční funkce podniku z dat? Zaručuje výše popsaná aplikace lineární regrese na roční data podniku odvození produkční funkce, nebo to, co odvodíme, bude něco jiného než produkční funkce? Jak byste svou odpověď zdůvodnili?

Další zdroje informací

Baldani, J., Bradfield, J., Turner, R. W. (2005) *Mathematical economics*. Thomson South-Western, 2. vydání. ISBN 0324183321.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie I*. VŠB-TU, Ostrava.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie II*. VŠB-TU, Ostrava.

Cobb, C. W., Douglas, P. H.: A Theory of Production, *The American Economic Review*, Vol. 18, No. 1, Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association (Mar., 1928), pp. 139–165.

Hands, D. W. (2004) *Introductory mathematical economics*. Oxford University Press, 2. vydání. ISBN 0195133781.

Samuelson, P. A., Nordhaus, W. D. (2007): *Ekonomie*. NS Svoboda, Praha.

Soper, J. (2004) *Mathematics for economics and business: an interactive introduction.* Wiley-Blackwell, 2. vydání. ISBN 1405111275.

Část II
Nabídka a poptávka jinýma očima

V této části textu se pokusíme podívat na ekonomii, trh a hledání rovnováhy na něm trochu z jiného úhlu. Vyjdeme z teorie aktivit a teorie blahobytu a ukážeme si, jak by mohl vypadat jednoduchý axiomatický model ekonomiky. Nebudeme se přitom držet standardní linky definice-věta-důkaz. Důkazy tam, kde nebudou nezbytně nutné pro pochopení, přeskočíme, stejně tak i definice některých pojmů. Vše můžete ostatně bez problémů najít ve zdrojové literatuře.

Cílem této části není, abyste chápali každý krok. Spíše se zaměřte na strukturu a formu – na to, jak lze ekonomický systém popsat formálními matematickými nástroji. V této části čerpám ve značné míře z publikace *Mathematical Economics*, kterou napsal Akira Takayama. Čtenáře, který tento přístup zaujme, odkazuji právě na tuto publikaci. Je totiž jednou z těch, které se nebojí pokládat otázky typu „a co kdyby to bylo jinak?“

Kapitola 9
Alternativní pohled na produkci – analýza aktivit

Cíle
Prostudování této kapitoly umožní čtenáři:

- chápat produkci v širších souvislostech,
- nahradit při ekonomických úvahách produkční funkci obecnější produkční množinou,
- získat znalosti potřebné k dokazování některých základních ekonomických tvrzení matematickými prostředky (resp. zjistit, co by mohlo být k tomuto účelu potřeba a proč).

9.1 Úvod

Při rozboru teorie výroby jsme se zaměřili na popis výrobního procesu produkční funkcí, případně obecněji funkcí transformační. Oba tyto přístupy však vyžadovaly existenci „efektivního manažera“, neboť produkce byla v tomto chápání vždy stanovována jako maximální dosažitelné množství výstupů (produkce) při daných vstupech. V této kapitole si zavedeme obecnější matematický model produkce – *produkční množinu*. Díky tomu nemusíme uvažovat „efektivního manažera“ a navíc se přiblížíme o něco více reálnému modelovanému systému, protože uvažujeme také všechny výrobní procesy, které nejsou maximálně efektivní ve smyslu produkční funkce. S pomocí matematického modelu zavedeného v této kapitole pak budeme moci v kapitole další uvést některá zajímavá ekonomická tvrzení matematickými prostředky.

Ještě než si ukážeme přístup přes analýzu aktivit (více viz Akira Takayama (1997)), připomeňme si rychle v hlavních rysech (neo)klasický pohled na produkci. Pro neoklasickou produkční/transformační funkci platí následující:

- Popisuje vztahy mezi n vstupy $\mathbf{i} = (i_1, \ldots, i_n)$ a m výstupy $\mathbf{o} = (o_{n+1}, \ldots, o_{n+m})$.
- V nejobecnějším chápání ji lze pro konkrétního výrobce A zapsat jako transformační funkci:

$$T_A(i,o) = T_A(i_1,\ldots,i_n,o_{n+1},\ldots,o_{n+m}) = 0.$$

- Předpokládáme, že popisuje jedinečnou plochu nad rovinou (prostorem) danou $(i_1,\ldots,i_n)$.
- Obvykle pro jednoduchost neuvažujeme tzv. joint production (společnou produkci), tedy situaci, kdy máme více výstupů, a uvažujeme, že $o = (o_{m+1})$, tj. že výstup je jediný. V tom případě místo transformační funkce uvažujeme funkci produkční ve tvaru:
$$o_{m+1} = q_X = f(i_1,\ldots,i_n),$$
případně pro dva vstupy
$$o_{m+1} = q_X = f(K,L).$$
Navíc předpokládáme, že každé kombinaci vstupů (tj. výrobních faktorů) f přiřadí jediné množství výstupu – a to *maximální dosažitelnou produkci*. Předpokládáme tedy existenci inteligentního a efektivního manažera. Také zavádíme další předpoklady (do jisté míry omezující) – např. diferencovatelnost $f(i_1,\ldots,i_n)$, abychom mohli přejít k marginální analýze (tj. analýze mezních veličin). Přitom při neznalosti analytického tvaru produkční funkce nemusí být její analýza snadným úkolem. Odvození produkční funkce z dat také předpokládá, že jsme schopni věrohodně odhadnout alespoň typ/třídu produkční funkce, jejíž parametry následně odhadujeme z dat.

V takovémto pojetí produkce a produkční/transformační funkce se však skrývají jistá úskalí, např.:

- Je přítomno relativně hodně omezujících předpokladů (viz (8.5)–(8.9)). Abychom mohli aplikovat teorii, musíme být schopni platnost jednotlivých předpokladů ověřit, nebo ji alespoň musíme předpokládat.
- Předpokládáme existenci jakéhosi „efektivního manažera“, který maximalizuje výstup při daném množství vstupů. Uvažujeme-li joint production, je situace ještě komplikovanější – je obtížné říci, co to je „maximální výstup/produkce“.

Zajímavou alternativou k neoklasickému pohledu na produkci přes produkční funkci je *Analýza aktivit* (anglicky activity analysis).

9.2 Analýza aktivit – úvod

Analýza aktivit (procesní analýza) vychází z *množiny všech produkčních procesů* dostupných (existujících) v dané ekonomice (popř. firmě nebo souboru firem). Tuto množinu nazýváme *produkční množinou*. Předpokládá, že v ekonomice existuje n **komodit** takových, že:

- každá komodita je kvalitativně homogenní,
- každá komodita je definována:

– svými fyzickými znaky,
– lokalitou dostupnosti (např. rohlík z Olomouce a rohlík z Prahy jsou rozdílné komodity),
– datem dostupnosti (např. rohlík upečený dnes a upečený včera jsou rozdílné komodity).

Rozlišení časem a lokalitou dostupnosti umožňuje využívat i dynamické analýzy v rámci analýzy aktivit.

Produkční proces neboli **aktivita**[1] je popsán n-ticí komodit reprezentovanou n-řádkovým jednosloupcovým vektorem (9.1), kde n je přirozené číslo:

$$\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix}. \tag{9.1}$$

Produkční množina (*PS* z anglického Production Set) je definována vztahem (9.2).

$$PS = \left\{ (k_1, \ldots, k_n)^T \middle| (k_1, \ldots, k_n)^T \text{ jsou reálné v dané ekonomice} \right\} \tag{9.2}$$

Přitom platí, že

- pokud $k_j > 0$, pak k_j je *výstupem* daného výrobního procesu,
- pokud $k_j < 0$, pak k_j je *vstupem* daného výrobního procesu,
- pokud $k_j = 0$, pak k_j v daném výrobním procesu vůbec nevystupuje.

Už takto zavedený základní stavební kámen analýzy aktivit nám poskytuje relativně široké možnosti a je velice obecný. Oproti neoklasickému přístupu:

- Uvažujeme zde libovolný počet procesů/aktivit přetvářejících vstupy na výstupy (tj. nejen ty, které vytvářejí maximální dosažitelné výstupy).
- Připouštíme, že procesy mohou mít více výstupů (tj. více kladných složek ve vektoru (9.2)). Tím připouštíme výrobní procesy, které mají více než jeden výstup. Tj. analýza aktivit pokrývá jak to, co produkční funkce, tak i to, co transformační funkce, a rovněž další potenciální aktivity.
- Nepotřebujeme „efektivního manažera“ – neuvažujeme pouze maximální výstup při daných vstupech. Pohybujeme se nyní na *PS*, která je jakousi analogií např. množiny přípustných řešení v lineárním programování.

Pro ilustraci si představme ekonomiku, v níž existují pouze čtyři komodity (k_1 – boty, k_2 – práce, k_3 – kůže a k_4 – usně). V této ekonomice můžeme dva výrobní procesy, které mohou existovat, popsat např. tabulkou 9.1 (podobný příklad uvádí také Takayama). Výrobní procesy jsou v tomto případě reprezentovány vektory $(0, 1, -1, -1/10)^T$ a $(1, -1/4, 0, -1/2)^T$.

[1] V tomto textu budeme považovat označení výrobní proces, produkční proces a aktivita za synonyma.

Tabulka 9.1 Příklad dvou výrobních procesů v ekonomice se čtyřmi komoditami.

	Proces 1 (Koželužství)	Proces 2 (Výroba bot)
Komodita 1 (boty)	0	1
Komodita 2 (kůže)	1	$-1/4$
Komodita 3 (usně)	-1	0
Komodita 4 (práce)	$-1/10$	$-1/2$

9.2.1 *Analýza aktivit – formální zavedení*

Analýza aktivit je axiomatický přístup využívající aparátu teorie množin. Uvedeme si proto základní definice a axiomy a podíváme se, jaké výsledky nám tento přístup je schopen poskytnout.

Definice 9.1 (**aktivita**). *Nechť $PS \subset \mathbb{R}^n$ je množina všech technicky možných produkčních procesů (aktivit) v dané ekonomice. Nechť $\mathbf{p} = (k_1,\ldots,k_n)^T \in PS$ je produkční proces (aktivita) v dané ekonomice. Pro každé $i = 1,\ldots,n$ platí, že*

- *k_i reprezentuje vstup produkčního procesu p právě tehdy, když $k_i < 0$,*
- *k_i reprezentuje výstup produkčního procesu p právě tehdy, když $k_i > 0$,*
- *k_i nevystupuje v produkčním procesu p právě tehdy, když $k_i = 0$,*
- *$|k_i|$ značí množství (počet jednotek) i-té komodity vystupující v produkčním procesu p.*

Když máme zaveden pojem aktivity, můžeme stanovit základní axiomy, jejichž platnost v rámci analýzy aktivit předpokládáme. Těmito základními axiomy jsou:

A1 – aditivita Tento axiom předpokládá neexistenci interakcí mezi jednotlivými aktivitami. V podstatě říká, že neexistují synergické ani tlumivé efekty a že kombinací dvou aktivit získáme opět aktivitu z produkční množiny:

$$\big(\mathbf{p} \in PS \wedge \mathbf{p}' \in PS\big) \Rightarrow \big(\mathbf{p}+\mathbf{p}'\big) \in PS, \quad \text{pro každé } \mathbf{p},\mathbf{p}' \in PS \tag{9.3}$$

A2 – proporcionalita Tento axiom předpokládá, že jestliže je aktivita realizovaná v nějaké podobě, pak je možné její rozměr proporciálně navýšit nebo snížit a stále dostaneme aktivitu reálnou v dané ekonomice. Mimo jiné tento axiom předpokládá úplnou dělitelnost všech komodit (a také konstantní výnosy z rozsahu):

$$\mathbf{p} \in PS \Rightarrow \alpha \cdot \mathbf{p} \in PS, \quad \text{pro každé } \mathbf{p} \in PS \text{ a } \alpha \geq 0, \alpha \in \mathbb{R} \tag{9.4}$$

Z výše uvedených axiomů také plyne, že $\mathbf{0} = (0,\ldots,0)^T \in PS$, tj. že **existuje možnost nicnedělání**. Ze současné platnosti axiomů A1 a A2 plyne, že PS je tzv. *konvexní kužel*, tj. že pro každé $\mathbf{p},\mathbf{p}' \in PS$, a pro každé $\lambda,\lambda' \geq 0$, $\lambda,\lambda' \in \mathbb{R}$, platí, že $(\lambda \cdot \mathbf{p} + \lambda' \cdot \mathbf{p}') \in PS$. Jinými slovy pro každé $\mathbf{p}_j \in PS$ takové, že $\mathbf{p}_j = (k_{1j}, k_{2j},\ldots,k_{nj})$ a pro každé $\lambda_j \geq 0$, $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j \in \{1,\ldots,m\}$ platí, že

$$\sum_{j=1}^{m} \mathbf{p}_j \cdot \lambda_j \in PS.$$

A3 – konečný počet základních aktivit Tento axiom předpokládá, že existuje ko-nečný počet $\mathbf{p}_j$ takových, že PS je konvexní (polyedrický) kužel generovaný těmito $\mathbf{p}_j$. Takovýmto $\mathbf{p}_j$ říkáme základní (bazické) aktivity. Jinak řečeno PS můžeme zapsat ve tvaru

$$PS = \{\mathbf{p} | \mathbf{p} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m\}, \tag{9.5}$$

kde P je matice, jejímiž sloupci jsou jednotlivé základní aktivity:

$$\mathbf{P} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_m) = \begin{pmatrix} k_{11} & k_{12} & \ldots & k_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ k_{n1} & k_{n2} & \ldots & k_{nm} \end{pmatrix},$$

a λ je vektor nezáporných reálných koeficientů:

$$\boldsymbol{\lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

Jinak řečeno, každou aktivitu můžeme vyjádřit jako lineární kombinaci bazických (základních) aktivit s nezápornými koeficienty.

Jak podotýká Takayama, výše uvedené axiomy jsou často doplňovány dalšími axiomy. Např. Koopmans dodává k výše uvedeným další tři axiomy:

A4 – produktivita – některé $\mathbf{p} \in PS$ mají alespoň jednu kladnou složku. Tento axiom tedy říká, že v ekonomice existují aktivity (alespoň jedna v ekonomice), které mají kladný výstup. Jinak řečeno jde o předpoklad, že *v ekonomice je něco produkováno*.

A5 – no Land of Cockaigne – Land of Cockaigne (do češtiny překládaná jako země peciválů) je mýtickou zemí, v níž není nutné pracovat, a přesto jsou všechny potřeby všech uspokojovány. Axiom 5 říká, že nic takového nemůže existovat. Jinými slovy tento axiom předpokládá, že není možná výroba bez vstupů, možná je nejvýše nečinnost:

$$\left(\mathbf{p} = (k_1, \ldots, k_n)^T \geq \mathbf{0} \wedge \exists i : k_i > 0\right) \Rightarrow \mathbf{p} \notin PS \text{ nebo } PS \cap \Omega = \{\emptyset\}, \tag{9.6}$$

kde $\Omega = \left\{\mathbf{p} | \mathbf{p} = (k_1, \ldots, k_n)^T, k_i \geq 0, \text{ pro každé } i = 1, \ldots, n\right\}$, tedy reprezentuje nezápornou část produkční množiny.

A6 – nezvratnost Tento axiom říká, že v ekonomice nemohou zároveň existovat dvě aktivity takové, že jedna něco vyrábí z daných vstupů a druhá produkuje tytéž vstupy z daných výrobků. Není tedy možné vyrobené komodity rozložit zpět na výrobní faktory (vstupy) bez ztrát. Jinými slovy:

$$(\mathbf{p} \in PS \wedge \mathbf{p} \neq \mathbf{0}) \Rightarrow (-\mathbf{p} \notin PS \vee PS \cap (-PS) = \{\mathbf{0}\}). \tag{9.7}$$

Dá se dokázat např. následující věta:

Věta 9.1. *Nechť* $PS = \{\mathbf{p}|\mathbf{p} = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m\}$. *Pak PS splňuje A5 tehdy a jen tehdy, když existuje vektor* $\mathbf{c} > \mathbf{0}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{c}\| < \infty$, *takový,* $\mathbf{c}\cdot\mathbf{p} \leq 0$ *pro každé* $\mathbf{p} \in PS$.

Přitom pokud interpretujeme $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$ jako cenový vektor, pak $\mathbf{c}\cdot\mathbf{p}$ reprezentuje zisk produkčního procesu $\mathbf{p}$. Věta 9.1 pak říká, že maximální možný zisk z výrobního procesu (a to libovolného procesu/aktivity z *PS*) je nejvýše nulový. Toto je zjištění známé i z klasické ekonomické teorie (nemožnost dlouhodobě dosahovat zisku).

9.3 Obecná produkční množina (*GPS*) a efektivní bod

Je možné některé z uvedených axiomů i vypustit a definici produkční množiny ještě zobecnit. Dostáváme tak tzv. obecnou produkční množinu (*GPS*, z anglického Generalized Production Set), která je množinou aktivit splňující následující podmínky:

- *GPS* je uzavřená,
- $\mathbf{0} \in GPS$, je tedy možné nedělat nic,
- produktivita (A4),
- no Land of Cockaigne (A5),
- nezvratnost (A6),
- free disposability – tj. možnost volného zbavování se vstupů. Touto podmínkou je připuštěna existence takových aktivit, které jen spotřebovávají, ale nic nevyrábí, tj. které mají nulový výstup:

$$\mathbf{p} \in -\Omega \;\Rightarrow\; (\mathbf{p} \in GPS \;\text{ nebo }\; (-\Omega) \subset GPS) \tag{9.8}$$

- platí jedno z následujících:
  - *GPS* je konvexní polyedrický kužel,
  - *GPS* je konvexní kužel,
  - *GPS* je konvexní.

Uvědomme si, že zatím jsme v případě *PS* a *GPS* nebrali ohled na dostupnost vstupů. Uvažovali jsme tedy, že každé $\mathbf{p} \in GPS$ popisuje, kolik výstupů je možné *teoreticky* vyprodukovat s danými vstupy, a to bez ohledu na to, jestli je dostatek vstupů k dispozici. Přitom omezené množství vstupů v tomto přístupu není vůbec problém zohlednit. Stačí uvažovat vektor $\bar{\mathbf{z}} \geq 0$, $\bar{\mathbf{z}} = (z_1, \ldots, z_n)^T$. Obecnou produkční množinu, která obsahuje jen ty aktivity, pro něž je v ekonomice dostatek vstupů, pak můžeme s využitím základních aktivit zapsat následujícím způsobem:

$$GPS = \{\mathbf{p}|\mathbf{p} = \mathbf{P}\cdot\boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{\lambda} \geq 0, \boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}^m, \mathbf{p} + \bar{\mathbf{z}} \geq \mathbf{0}\}\,. \tag{9.9}$$

Definice 9.2 (**efektivní bod**). *Nechť GPS* $\subset \mathbb{R}^n$ *je obecná produkční množina. Bod* $\hat{\mathbf{p}}$ *z GPS se nazývá efektivním bodem GPS, jestliže neexistuje* $\mathbf{p} \in GPS$ *takové, že* $\mathbf{p} \geq \hat{\mathbf{p}}$.

Efektivní body reprezentují takové aktivity (vstupně-výstupní vztahy), kde není možné (v dané ekonomice) zvýšit množství žádného z výstupů, aniž bychom zvýšili množství některého ze vstupů, nebo snížili množství některého z ostatních výstupů. *Efektivní body tedy odpovídají kombinacím vstupů a výstupů, které by popisovala neoklasická produkční funkce.* Tím je jasně patrná souvislost mezi (neo)klasickou ekonomickou teorií a analýzou aktivit. Klasická teorie pracuje jen s efektivními body, kdežto analýza aktivit se všemi myslitelnými kombinacemi vstupů a výstupů.

9.4 Základní věty analýzy aktivit

V rámci analýzy aktivit je možné dokázat následující tvrzení:

Věta 9.2. *Mějme obecnou produkční množinu GPS* $\subset \mathbb{R}^n$. *Bod* $\hat{\mathbf{p}}$ *z GPS je efektivním bodem GPS, jestliže existuje* $\mathbf{c} > \mathbf{0}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{c}\| < \infty$, *takový, že*

$$\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}} \geq \mathbf{c} \cdot \mathbf{p} \ \textit{ pro každé } \ \mathbf{p} \in GPS. \tag{9.10}$$

Pro zajímavost si ukažme důkaz této věty:

Důkaz. Předpokládejme, že $\hat{\mathbf{p}}$ není efektivním bodem *GPS* a přesto platí $\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}} \geq \mathbf{c} \cdot \mathbf{p}$ pro každé $\mathbf{p} \in GPS$. Pak musí existovat jiná aktivita $\mathbf{p} \in GPS$ taková, že $\mathbf{p} \geq \hat{\mathbf{p}}$. Pak ale $\mathbf{c} \cdot \mathbf{p} \geq \mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}}$. □

Věta 9.3. *Nechť cPS je konvexní produkční množina v* $\mathbb{R}^n$. *Jestliže* $\hat{p}$ *je efektivním bodem cPS, pak existuje vektor* $\mathbf{c} > \mathbf{0}$, $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$, $\|\mathbf{c}\| < \infty$ *takový, že*

$$\mathbf{c} \cdot \hat{\mathbf{p}} \geq \mathbf{c} \cdot \mathbf{p} \ \textit{ pro každé } \ \mathbf{p} \in cPS.$$

Věta 9.3 charakterizuje efektivní body konvexní produkční množiny jako body maximalizující zisk. Jestliže jsou efektivní body v analýze aktivit analogií bodů neoklasické produkční funkce, pak máme důkaz, že má smysl realizovat maximalizaci zisku v (neo)klasické teorii právě s využitím produkční funkce – jsou to totiž právě body neoklasické produkční funkce, v nichž je možné nalézt maximum zisku producentů.

Shrnutí

Klasický pohled na produkci je možné zobecnit tak, že od produkční funkce přejdeme k produkční množině. Produkční množina je množina výrobních aktivit (procesů), které splňují axiomy A1 – A3 (a také A4 – A6). Z uvedených axiomů je možné dokázat, že zisk každého z producentů je nejvýše nulový (což v dokonalé konkurenci není nijak překvapující, ale je to v souladu s klasickou ekonomickou teorií v její standardní formulaci). Zmírněním některých předpokladů je možné zavést také obecnou produkční množinu. Z uvedených axiomů je pak možné dokázat například, že maximální možný zisk každé aktivity (splňující axiomy A1–A6) je nejvýše nulový, že existuje-li efektivní bod *cPS*, pak je bodem maximalizujícím zisk, apod.

Otázky k zamyšlení

- Jak se liší tento přístup od klasického pohledu na produkci? V čem vidíte podobnosti a v čem zásadní odlišnosti?
- Umíte uvést praktické příklady toho, co znamenají jednotlivé výše uvedené axiomy?
- Umíte posoudit, jak moc je výše uvedený pohled na ekonomiku (v tomto případě na formování nabídky) idealizovaný? Je tento pohled více nebo méně restriktivní než klasický pohled na teorii výrobce?

Další zdroje informací

Baldani, J., Bradfield, J., Turner, R. W. (2005) *Mathematical economics*. Thomson South-Western, 2. vydání. ISBN 0324183321.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie I*. VŠB-TU, Ostrava.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie II*. VŠB-TU, Ostrava.

Cobb, C. W., Douglas, P. H.: A Theory of Production, *The American Economic Review*, Vol. 18, No. 1, Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association (Mar., 1928), pp. 139–165.

Hands, D. W. (2004) *Introductory mathematical economics*. Oxford University Press, 2. vydání. ISBN 0195133781.

Samuelson, P. A., Nordhaus, W. D. (2007): *Ekonomie*. NS Svoboda, Praha.

Soper, J. (2004) *Mathematics for economics and business: an interactive introduction.* Wiley-Blackwell, 2. vydání. ISBN 1405111275.

Takayama, A. (1997) *Mathematical Economics.* Cambridge University Press, 2nd edition.

Kapitola 10
Alternativní pohled na spotřebu

Cíle
Prostudování této kapitoly umožní čtenáři:

- formulovat teorii spotřebitele v pojmech analýzy aktivit a propojit tyto dva pohledy pro účely nalezení rovnováhy na trhu,
- porozumět pojmům globální kompetitivní (konkurenční) rovnováha a paretovská optimalita,
- uplatnit analýzu aktivit při hledání odpovědí na základní otázky welfare economics – jaká je souvislost mezi globální kompetitivní rovnováhou a paretovským optimem,
- stanovit podmínky, za kterých z paretovské optimality plyne dosažení kompetitivní rovnováhy a naopak,
- dát si do souvislosti výrobu, spotřebu a omezení jak na zdroje, tak i na důchod spotřebitelů v rámci modelu ekonomie soukromého vlastnictví.

10.1 Úvod

Podobně jako u analýzy produkčních aktivit, také u teorie spotřebitele můžeme zobecnit svůj pohled a pokusit se celou situaci modelovat pomocí vektorů. V této kapitole si proto zavedeme *spotřební množinu* (*CS* – jako protiváhu produkční množině z předchozí kapitoly). Představíme si koncept *welfare economics*, uvedeme si definici *kompetitivní rovnováhy* a *paretovského optima*. Na základě těchto pojmů budeme schopni nalézt podmínky, za nichž existuje kompetitivní rovnováha na trhu, a také popsat souvislost kompetitivní rovnováhy a paretovské optimality.

10.2 Spotřební množina

Alternativní teorii spotřebitele můžeme postavit podobně jako teorii produkce v předchozí kapitole. Opět využijeme aparátu teorie množin (Takayama). Výchozím pojmem je spotřební množina. *Spotřební množina* (*CS*, z anglického Consumption Set) popisuje soubor (množinu) všech možných spotřebních košů (tj. kombinací množství komodit). Formálně si ji zavedeme vztahem (10.1).

$$CS = \{(k_1, \ldots, k_n)^T \in \mathbb{R}^n \big| (k_1, \ldots, k_n)^T \geq 0, \exists i : k_i > 0\} \tag{10.1}$$

Množina CS je tedy až na bod $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ ztotožnitelná s množinou Ω (definovanou u axiomu A5 v předchozí kapitole). Platí pro ni následující předpoklady:

CS1: Množina CS je *konvexní množina.*
CS2: Každý jednotlivec může konzumovat libovolně velké množství každého statku (komodity). Všimněme si, že zatím v našich úvahách nevystupují ceny ani důchod, tedy ani rozpočtové omezení. Stále vymezujeme všechny situace, které teoreticky mohou pro spotřebitele připadat v úvahu.
CS3: Jedinec může přežít, spotřebovává-li nenulové (kladné) množství alespoň jedné komodity. Asi cítíme, že tento předpoklad není úplně v souladu s realitou, nicméně vysvětluje, proč definujeme CS vztahem (10.1). V tomto smyslu bod $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ je jakýmsi limitním bodem „vyhladovění", chcete-li minimální spotřebou zajišťující existenci (ovšem spíše ve smyslu infima – jde o „první spotřebu", která už existenci a přežití nezaručí).
CS4: CS je podmnožinou konečnědimenzionálního vektorového prostoru.

V podstatě tedy na CS neklademe žádné zásadní omezující požadavky. Abychom se mohli bavit o optimalizaci v rámci teorie spotřebitele, budeme potřebovat znát preferenční relaci daného spotřebitele, případně jeho užitkovou funkci, podobně jako v klasické teorii spotřebitele. Proto zavedeme alespoň některé potřebné pojmy.

10.3 (Kvazi)uspořádání na *CS*

Jako u klasické teorie spotřebitele, i v tomto případě budeme potřebovat nějaké měřítko, kterým by spotřebitel mohl poměřovat jednotlivé spotřební koše a mohl se tak chovat racionálně a vybírat si to, co mu nejvíce vyhovuje (tj. mohl optimalizovat své chování).

Nechť je CS spotřební množina osoby A, mějme dva spotřební koše $b_1, b_2 \in CS$. Předpokládáme, že A umí rozhodnout, jestli

- preferuje b_1 před b_2, ozn. $b_1 \succ b_2$, (nebo naopak),
- b_1 není horší než b_2, ozn. $b_1 \succeq b_2$, (nebo naopak),
- b_1 a b_2 jsou ekvivalentní, ozn $b_1 \approx b_2$ (tj. vyhovují oba stejně, jsou pro spotřebitele indiferentní).

Předpokládáme tedy, že A umí zadat preferenční relaci na $CS \times CS$.

Definice 10.1 (preferenční uspořádání)**.** *Binární relaci $R \subseteq CS \times CS$ nazveme kvaziuspořádáním (preferenčním uspořádáním), jestliže pro každé $a, b, c \in CS$ platí:*

i. reflexivita: $a\,R\,a$
ii. tranzitivita: $(a\,R\,b) \wedge (b\,R\,c) \Rightarrow (a\,R\,c)$.

Jestliže R navíc splňuje

iii. antisymetrie: $[(a\,R\,b) \wedge (b\,R\,a)] \Rightarrow (a = b)$,

pak nazveme R částečným uspořádáním.

Pozn.: Pro úplné uspořádání bychom museli dodat podmínku, že pro každé $a, b \in CS$ takové, že $a \neq b$, platí buď $(a\,R\,b)$ nebo $(b\,R\,a)$.

Definice 10.2 (relace ekvivalence)**.** *Binární relaci $R \subseteq CS \times CS$ nazveme relací ekvivalence, jestliže je pro každé $a, b, c \in CS$*

i. reflexivní: $a\,R\,a$,
ii. tranzitivní: $(a\,R\,b) \wedge (b\,R\,c) \Rightarrow (a\,R\,c)$,
iii. symetrická: $(a\,R\,b) \Rightarrow (b\,R\,a)$.

Klasická ekonomická teorie obvykle předpokládá, že preferenční uspořádání spotřebitele A je definováno na CS_A – tj. na jeho spotřební množině a je tedy nezávislé na spotřebních koších ostatních spotřebitelů. Takto definované preferenční uspořádání nazýváme *sobecké/individualistické*.

Nyní je otázkou, co musí být splněno, aby existovala kardinální funkce užitku. Požadujeme-li kardinalitu, pak každému spotřebnímu koši $x \in CS_A$ musíme umět přiřadit hodnotu/index užitku, tj. reálné číslo reprezentující výši užitku spotřebitele A ze spotřebního koše x.

Definice 10.3 (funkce užitku)**.** *Funkce užitku je zobrazení $u : CS_A \to \mathbb{R}$, které splňuje pro každé $x, y \in CS_A$:*

- $x \succeq y \Leftrightarrow u(x) \geq u(y)$,
- $x \succ y \Leftrightarrow u(x) > u(y)$,
- $x \approx y \Leftrightarrow u(x) = u(y)$.

Po dodefinování několika dalších pojmů, které nejsou pro nás v tuto chvíli zásadní (zájemci je najdou např. v Mathematical Economics od Takayamy) je pak možné dokázat následující větu.

Věta 10.1 (Debreuova věta)**.** *Nechť CS je souvislou podmnožinou $\mathbb{R}^n$ a nechť $\succeq$ je spojité úplné kvaziuspořádání na CS. Pak existuje pro $\succeq$ na CS spojitá funkce užitku.*

10.4 Základní otázky welfare economics

Při zavádění obecnější teorie spotřebitele vyjdeme z teorie ekonomie blahobytu (anglicky welfare economics). I když bude tato pasáž relativně teoretická, má smysl ji zde uvést, neboť na jejím konci odvodíme pro ekonomickou praxi velice zajímavé výsledky. V tržní ekonomice (zejm. v dokonalé konkurenci) platí, že

- každý *výrobce je price-taker* (příjemce ceny) – maximalizuje svůj zisk při daném vektoru cen a vektor cen nemůže snadno ovlivnit,
- každý *spotřebitel je price-taker* – nemůže ovlivnit cenu na trhu, maximalizuje svůj užitek přes množinu „balíků" komodit (spotřebních košů), které si je možné v dané ekonomice koupit při daném cenovém vektoru.

Předpokládejme tedy nyní, že existuje ekonomika složená z takovýchto výrobců a spotřebitelů, a předpokládejme, že se v této ekonomice rovná celková nabídka komodit celkové poptávce po nich, tedy $D = S$. Takovýto stav je částečně popsán některým efektivním produkčním bodem *GPS* (tento pojem však nijak nezahrnuje spotřebitele). Je tedy dosaženo určitého optima společenského blahobytu?

Na tuto otázku odpovíme jen těžko, pokud nepřidáme spotřebitele do našich úvah. Když jej v našich úvahách zohledníme, vyvstane další problém – optimum spotřebitele je obvykle spojeno s utilitou, a tu neumíme měřit (alespoň v ordinalistické teorii, která je v současnosti silnější). Co neumíme měřit, to se nemůže stát měřítkem blahobytu. Společenský blahobyt bychom z pohledu spotřebitele mohli popsat s využitím konceptu *paretovské optimality*. Blahobyt je tedy stav, kdy si už žádný ze spotřebitelů nemůže polepšit, aniž by poškodil ostatní. To je ostatně obecný popis paretovské optimality.

Ihned se nabízí další otázka – jaký je tedy vztah mezi *bodem kompetitivní rovnováhy* (který souvisí také s teorií produkce, obecně bychom mohli říci, že popisuje situaci, kdy se nabídka rovná poptávce, přesná definice bude uvedena dále v textu) a *paretovským optimem* (tj. optimem spotřebitelů)?

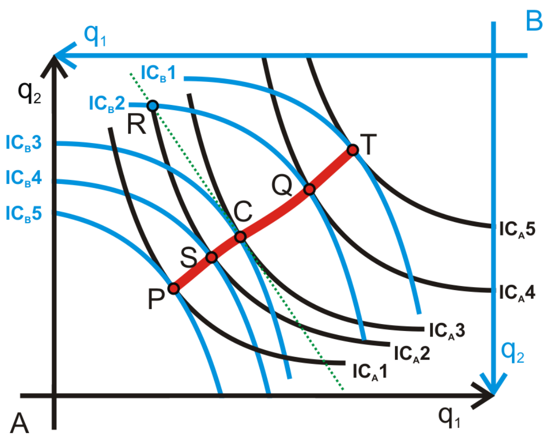
Ekonomie blahobytu se snaží odpovědět právě na podobné otázky. Konkrétně základní dvě otázky, kterými se zabývá, jsou:

1. ***Je bod kompetitivní rovnováhy paretovsky optimální?***
2. ***Je paretovsky optimální bod podpořen nějakým bodem kompetitivní rovnováhy?***

A pokud je odpověď na některou z těchto otázek kladná, *za jakých podmínek*? Obě výše uvedené otázky se přitom ptají po vztahu optima výrobců a optima spotřebitelů, tj. vztahu rovnováhy na trhu a optimality spotřebitele.

10.5 Box-diagram pro dva spotřebitele

Zkusme si nejdříve ilustrovat zmíněné pojmy na známých příkladech a pojmech z teorie spotřebitele. Rozpočtové omezení daného spotřebitele graficky znázorňujeme křivkou (*BL* – budget line), která odděluje dosažitelné a nedosažitelné kombinace spotřebovávaných množství statků. *BL* je tedy množinou *paretovsky optimálních* bodů spotřeby, neboť nacházíme-li se na *BL*, pak nemůžeme zvýšit spotřebu žádného ze statků, aniž bychom snížili spotřebu některého ze statků ostatních (protože už máme vyčerpány všechny peníze). *Bodem kompetitivní rovnováhy* v teorii spotřebitele (zatím uvažujeme jediného spotřebitele) je bod, v němž je směrnice tečny k indiferenční křivce rovna směrnici tečny indiferenční křivky. Uvažujeme-li dva spotřebitele, můžeme ke znázornění svých úvah použít Box-diagram (Obrázek 10.1).



Obrázek 10.1 Box diagram pro dva spotřebitele. Znázorňuje ekonomiku, v níž existují dva spotřebitelé *A* (černá indiferenční mapa) a *B* (modrá indiferenční mapa), neexistují v ní výrobci, spotřebitelé si vzájemně vyměňují 2 komodity X_1 a X_2. Všechny body na červené křivce jsou paretovsky optimální.

Než se pustíme do jeho interpretace, připomeňme si podstatné předpoklady, které model znázorněný obrázkem 10.1 klade:

- Uvažujeme ekonomiku, v níž jsou pouze dva spotřebitelé (*A* a *B*).
- V ekonomice neexistují výrobci.
- Existují pouze dvě komodity – X_1 a X_2 (v grafu jsou znázorněna jejich množství q_1 a q_2), obě komodity jsou žádoucí.
- Spotřebitelé si vzájemně vyměňují komodity X_1 a X_2 (tj. jeden nabízí druhému své komodity a poptává po něm jeho).
- Pro každého spotřebitele se pohybujeme pouze v nezáporném kvadrantu (tj. nepřipouštíme zápornou poptávku ani nabídku).
- Paretovsky optimální řešení v této situaci znamená, že např. *A* si nemůže polepšit (navýšit spotřebu některé z komodit), aniž by přitom poškodil *B* (snížil jeho spotřebu některé z komodit).

Z obrázku je zřejmé, že bod *R* (leží na IC_{A2} a IC_{B2}) není paretovsky optimální. Např. spotřebitel *A* může zvýšit svůj užitek přechodem z IC_{A2} až na IC_{A4}, přičemž užitek spotřebitele *B* zůstane stále stejný (výsledný bod *Q* leží na IC_{B2} a IC_{A4}). Oproti tomu všechny body na červené křivce $P - T$ jsou paretovsky optimální. Jde přitom o množinu bodů, v nichž indiferenční křivky obou spotřebitelů jsou vzájemně tečné (resp. mají společnou tečnu). V každém bodě křivky $P - T$ je navíc

BL obou spotřebitelů tečná k jejich *IC* (např. v bodě *C* je naznačena zeleně *BL*). Křivka $P-T$ je tedy *množinou bodů kompetitivní rovnováhy*. Křivka $P-T$, v ekonomii označovaná jako *contract curve*, je tedy množinou bodů kompetitivní rovnováhy, které jsou zároveň paretovsky optimální. Z obrázku by se tedy mohlo zdát, že:

1. Každým paretovsky optimálním bodem (body, v nichž IC_A a IC_B jsou tečné, resp. mají společnou tečnu) můžeme vést *BL*, která bude tečná k oběma indiferenčním křivkám, tedy že každý paretovsky optimální bod je podpořen kompetitivním optimem.
2. V každém bodě kompetitivní rovnováhy jsou IC_A a IC_B vzájemně tečné, tedy každý bod kompetitivní rovnováhy je zároveň paretovsky optimální.

Mohlo by se tedy zdát, že jsme našli odpovědi na základní otázky teorie blahobytu. To je ostatně problém mnoha „intuitivních důkazů grafem“. Zkusme si tedy odpovědět na následující otázky:

- Jak zásadní je pro dosažené závěry předpoklad, že spotřební množina bude pouze nezáporný kvadrant $\mathbb{R}^2$?
- Musí být spotřební množina konvexní?
- Hraje nějakou roli dělitelnost komodit?
- Musí spotřební množina (spotřební koš) každého spotřebitele obsahovat tytéž komodity?
- Musí být *IC* striktně konvexní k počátku?
- Musí být *IC* hladké?
- Potřebujeme spojité funkce užitku jednotlivých spotřebitelů?
- Jakou roli hraje nasycení/přesycení jednotlivých spotřebitelů?
- Co když *BL* splyne s jednou z hran box–diagramu?
- Změní se závěry, pokud zohledníme produkci?
- Platí závěry i pro více spotřebitelů? (a více komodit?)

Může být poučné uvést si na tomto místě citát Koopmanse: „*V procesu čtení grafu nás nic nenutí uvádět všechny předpoklady a postupovat po krocích k závěrům skrze řetězec implikací (jak je to obvyklé při logické dedukci). Předpoklady mohou být skryty v tom, jak se křivky obvykle kreslí, a závěry mohou být přijaty bezpodmínečně, ačkoliv ve skutečnosti závisí na nevyřčených předpokladech.*“ Je dobré si uvědomit, že závěry vyvozené pouze z grafu pro jedinou (a ještě značně zjednodušenou) situaci mohou být velice slabé.

Zatím stále jaksi uměle oddělujeme produkci od spotřeby a v našich úvahách je analyzujeme samostatně. To může působit problémy při interpretaci pojmu kompetitivní rovnováha (zejména v situaci, kdy uvažujeme pouze dva spotřebitele a žádného výrobce a tedy v podstatě není mezi kým kompetitivní rovnováhu nastolit). V další části textu už přestaneme spotřebu od produkce oddělovat a pokusíme se o integrativní pojetí a analýzu ekonomiky jako celku, tedy jako systému, v němž vystupují jak výrobci, tak i spotřebitelé a to ve vzájemných vazbách a souvislostech.

10.6 Odpovědi na základní otázky welfare economics

Stejně tak jako u analýzy aktivit si musíme nejdříve zavést pojmový aparát, odpovídající značení a předpoklady. Naše výchozí předpoklady budou následující:

- Uvažujeme ekonomiku s n komoditami, m spotřebiteli a r výrobci.
- $\mathbf{s}_i = (k_1^{(i)}, \ldots, k_n^{(i)})$ je spotřební vektor i-tého spotřebitele, interpretace složek je stejná jako u teorie produkce, $i = 1, \ldots, m$, $k_l^i \geq 0$, $l = 1, \ldots, n$.
- $\mathbf{p}_j = (k_1^{(j)}, \ldots, k_n^{(j)})$ je výrobní vektor (aktivita) j-tého výrobce, $j = 1, \ldots, r$, kde
  - $k_l^{(j)} > 0$ označuje l-tý výstup výrobního procesu j-tého výrobce,
  - $k_l^{(j)} < 0$ označuje l-tý vstup výrobního procesu j-tého výrobce,
  - $k_l^{(j)} = 0$ označuje komoditu, která se výrobního procesu j-tého výrobce neúčastní (ani jako vstup, ani jako výstup).
- $\mathbf{s} \equiv \sum_{i=1}^{m} \mathbf{s}_i$ je agregátní (celková) spotřeba.
- $\mathbf{p} \equiv \sum_{j=1}^{r} \mathbf{p}_j$ je agregátní (celková) produkce.
- CS_i je spotřební množina i-tého spotřebitele, $CS_i \subseteq \mathbb{R}^n$.
- PS_j je produkční množina j-tého výrobce, $PS_j \subseteq \mathbb{R}^n$.
- CS je agregovaná spotřební množina, $CS \equiv \sum_{i=1}^{m} CS_i$, $CS_i \subseteq \mathbb{R}^n$.
- PS je agregovaná produkční množina, $PS \equiv \sum_{j=1}^{r} PS_j$, $PS_j \subseteq \mathbb{R}^n$.
- Máme preferenční uspořádání i-tého spotřebitele $\succeq_i$.
- Máme-li cenový vektor $\mathbf{c} = (c_1, \ldots, c_n)$, pak $\mathbf{c} \cdot \mathbf{p}_j$ je zisk j-tého výrobce.
- Předpokládáme existenci počátečního „balíku“ komodit v ekonomice, který označíme $\bar{\mathbf{s}} = (\bar{k}_1, \ldots, \bar{k}_n)$. Předpokládáme také, že $\bar{\mathbf{s}}$ je na počátku v držení spotřebitelů – i-tý spotřebitel má tedy na počátku $\bar{\mathbf{s}}_i = (\bar{k}_1^{(i)}, \ldots, \bar{k}_n^{(i)})$ komodit, přičemž platí, že $\bar{\mathbf{s}} = \sum_{i=1}^{m} \bar{\mathbf{s}}_i$.

Nyní si nadefinujeme základní pojmy ekonomie blahobytu.

Definice 10.4 (přípustná množina). *Množinu (pole) spotřebních vektorů $\{\mathbf{s}_i\}_{i=1}^{m} = \{\mathbf{s}_1, \ldots, \mathbf{s}_m\}$ označíme jako přípustnou, jestliže existuje množina výrobních vektorů $\left\{\mathbf{p}_j\right\}_{j=1}^{r} = \{\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_r\}$ takových, že*

$$\mathbf{s} = \mathbf{p} + \bar{\mathbf{s}}. \tag{10.2}$$

Jinými slovy (10.2) říká, že celková spotřeba je limitována tím, co producenti jsou schopni vyrobit a tím, co je na počátku v ekonomice dostupné. Jde tedy o klasickou podmínku dosažitelnosti. Spotřeba je přípustná tehdy, když to, co chcou spotřebitelé spotřebovávat, je v ekonomice dostupné v potřebném množství (a také je dost vstupů do výrobních procesů pro produkci výstupů).

Definice 10.5 (paretovská optimalita). *Přípustnou množinu spotřebních vektorů $\{\hat{\mathbf{s}}_i\}$ nazveme paretovsky optimální (ozn. P.O.), jestliže neexistuje přípustná množina spotřebních vektorů $\{\mathbf{s}_i'\}$ taková, že:*

$$\mathbf{s}_i' \succeq_i \hat{\mathbf{s}}_i \text{ pro každé } i = 1, \ldots, m, \text{ a existuje i takové, že } \mathbf{s}_i' \succ \hat{\mathbf{s}}_i. \tag{10.3}$$

Přípustná množina spotřebních vektorů je tedy paretovsky optimální tehdy, když neexistuje jiná přípustná množina spotřebních vektorů, která by byla spotřebiteli více preferována – tj. neexistuje taková množina spotřebních vektorů, kterou by jednotliví spotřebitelé považovali za stejně dobrou, a alespoň jeden z nich za lepší, než $\{\hat{\mathbf{s}}_i\}$. Není tedy možné si polepšit, aniž bychom někoho jiného poškodili – to je klasická obecná idea paretovské optimality.

Definice 10.6 (kompetitivní rovnováha). *Množina vektorů* $\left[\hat{\mathbf{c}}, \{\hat{\mathbf{s}}_i\}, \{\hat{\mathbf{p}}_j\}\right]$ *se nazývá kompetitivním rovnovážným bodem (C.E.), jestliže* $\hat{\mathbf{s}}_i \in CS_i$ *pro každé* $i = 1, \ldots, m$, *a* $\hat{\mathbf{p}}_j \in PS_j$ *pro každé* $j = 1, \ldots, r$ *a platí:*

1. $\hat{\mathbf{s}}_i \succeq_i \mathbf{s}_i$ *pro všechna* $\mathbf{s}_i \in CS_i$ *taková, že* $\hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{s}_i \leq \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{s}}_i$, $i = 1, \ldots, m$ *(**optimalita spotřebitele**),*
2. $\hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_j \geq \hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{p}_j$, *pro všechna* $\mathbf{p}_j \in PS_j$ *(**maximalizace zisku producentů**),*
3. $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{s}}$ *(**přípustnost**).*

Všimněme si, že definice 10.6 zohledňuje podle očekávání jak pohled spotřebitelů, tak pohled producentů, tak i omezující podmínky. Přitom zásadními komponentami rovnováhy jsou optimalita výrobce i spotřebitele a dosažitelnost rovnovážného stavu. Podmínka 1 v definici 10.6 znamená, že rovnováha musí být v bodě paretovského optima všech spotřebitelů – neexistuje levnější kombinace komodit, která by byla spotřebitelem více preferována než $\hat{s}_i$. Podmínka 2 znamená, že je realizován maximální zisk producentů – daný výrobní vektor přináší nejvyšší možný zisk při daných cenách. Podmínka 3 je podmínkou zaručující, že všichni producenti budou mít dostatek vstupů a všichni spotřebitelé dostatek komodit k naplnění své spotřeby. Nyní můžeme dostat alespoň částečnou odpověď na otázku vztahu kompetitivní rovnováhy a paretovské optimality.

Věta 10.2 (K první základní otázce welfare economics). *Nechť* $\left[\hat{\mathbf{c}}, \{\hat{\mathbf{s}}_i\}, \{\hat{\mathbf{p}}_j\}\right]$ *je kompetitivní rovnovážný bod takový, že* $\hat{\mathbf{s}}_i$ *je lokálním bodem nenasycení pro každé* $i = 1, \ldots, m$. *Nechť platí předpoklad*

P1: *preferenční uspořádání* $\succeq_i$ *je lokálně nesaturující pro každé* $i = 1, \ldots, m$.

Pak $\left[\{\hat{\mathbf{s}}_i\}, \{\hat{\mathbf{p}}_j\}\right]$ *je paretovským optimem.*

Tato věta tedy říká, že za uvedených podmínek je bod kompetitivní rovnováhy paretovsky optimální. Neříká ale nic o samotné existenci kompetitivního rovnovážného bodu. Lokální bod nenasycení je velmi zjednodušeně řečeno takový bod, k němuž existuje libovolně blízko jiný bod CS_i, který by byl preferován daným rozhodovatelem. Pro více informací o uvedených pojmech je dobré obrátit se např. na publikaci Akira Takayamy uvedenou ve zdrojích této kapitoly.

Věta 10.3 (O existenci $C.E.$). *Nechť* CS'_i *jsou zobecněné spotřební množiny takové, že* $CS'_i \subset \mathbb{R}^n$, $\mathbf{s}'_i = (k_1^{(i)}, \ldots, k_n^{(i)})$, *kde* $k_l^{(i)} > 0$ *znamená, že spotřebitel i poptává komoditu l a* $k_l^{(i)} < 0$ *znamená, že spotřebitel i nabízí komoditu l, pro každé* $i = 1, \ldots, m$. *Nechť jsou dále splněny všechny následující předpoklady:*

CE1: CS'_i *je uzavřená, konvexní a omezená pro každé* i,

CE2: *CS_i' je úplně kvazi-uspořádaná a to striktně konvexním a spojitým preferenčním uspořádáním $\succeq_i$ pro každé i,*
CE3: *PS je uzavřený konvexní kužel,*
CE4: *$PS \cap \Omega = \{0\}$, tj. no Land of Cockaigne – nelze vyrábět bez vstupů,*
CE5: *$CS_i' \cap PS$ má pro každé i nějaký vnitřní bod,*
CE6: *buď při cenách $\hat{\mathbf{c}}$ není žádný spotřebitel nasycen, nebo je-li některý spotřebitel nasycen při cenách $\hat{\mathbf{c}}$, pak $C(\hat{\mathbf{c}}) \cap PS = \emptyset$, kde $C(\hat{\mathbf{c}}) = \sum_{i=1}^{m} C_i(\hat{\mathbf{c}})$; $C_i(\hat{\mathbf{c}}) \equiv \{\mathbf{s}_i' | \hat{\mathbf{s}}_i \succeq_i \mathbf{s}_i$ pro každé $\mathbf{s}_i \in H_i(\hat{\mathbf{c}})\}$ a $H_i(\hat{\mathbf{c}}) \equiv \{\mathbf{s}_i' | \hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{s}_i \le 0, \mathbf{s}_i \in CS_i'\}$,*

pak existuje kompetitivní rovnovážný bod.

Zajímavé výsledky je možné získat také pro *ekonomii soukromého vlastnictví*.

10.7 Ekonomie soukromého vlastnictví (POE)

Model ekonomie soukromého vlastnictví (POE z anglického Private Ownership Economy) doplňuje odpověď na otázku, jak spotřebitelé získávají důchod pro realizaci své spotřeby. Předpokládá, že spotřebitel má dva potenciální zdroje příjmů:

- Spotřebitel získává hodnotu jím na počátku vlastněných komodit, jinými slovy:
$$\hat{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{s}}_i, \tag{10.4}$$
kde $\hat{c}$ je cenový vektor a $\bar{s}_i$ je vektor komodit na počátku vlastněný daným spotřebitelem.
- Spotřebitel získává také část zisku producentů, jelikož v POE jsou všichni výrobci ve vlastnictví spotřebitelů. Předpokládáme-li, že každý spotřebitel může vlastnit podíly několika firem (producentů), pak $\boldsymbol{\theta}_i = (\theta_1^{(i)}, \dots, \theta_r^{(i)})$ popisuje, jaký podíl (vlastnický) má spotřebitel i v jednotlivých firmách $1, \dots, r$. Přitom podíl spotřebitele i na firmě k, tj. $\theta_k^{(i)}$ musí splňovat $\theta_k^{(i)} \in \mathbb{R}$ a $\theta_k^{(i)} \in \langle 0, 1 \rangle$. Jelikož předpokládáme, že podniky jsou plně ve vlastnictví spotřebitelů, pak musí platit $\sum_{i=1}^{m} \theta_k^{(i)} = 1$ pro každé $k = 1, \dots, r$. V tomto případě pak spotřebiteli z vlastnictví podílu na firmách plyne část zisku z jejich produkce ve výši:
$$\sum_{k=1}^{r} \theta_k^{(i)} \cdot \hat{c} \cdot \hat{p}_k. \tag{10.5}$$

Nyní můžeme formálně zavést kompetitivní rovnovážný bod POE, ozn. CEPOE (z anglického Competitive Equiligbrium of the Private Ownership Economy).

Definice 10.7 (kompetitivní rovnovážný bod ekonomie soukromého vlastnictví, CEPOE). *Pole (množinu) vektorů $\left[\hat{\mathbf{c}}, \{\hat{\mathbf{s}}_i\}, \{\hat{\mathbf{p}}_j\}, \{\boldsymbol{\theta}_l\}\right]$ nazveme bodem kompetitivní rovnováhy ekonomie soukromého vlastnictví (CEPOE), jestliže platí pro každé $\hat{\mathbf{s}}_i \in CS_i$, $i = 1, \dots, m$, a pro každé $\hat{\mathbf{p}}_j \in PS_j$, $j = 1, \dots, r$, následující:*

I: $\hat{\mathbf{s}}_i \succeq_i \mathbf{s}_i$ *pro všechna* $\mathbf{s}_i \in CS_i$ *taková, že* $\hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{s}_i \leq M_i$*, kde* $M_i = \hat{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{s}}_i + \sum_{k=1}^{r} \theta_k^{(i)} \cdot \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_k$ *(**maximalizace užitku spotřebitele** s přihlédnutím k důchodu spotřebitele),*
II: $\hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_j \geq \hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{p}_j$ *pro každé* $\mathbf{p}_j \in PS_j,\ j = 1, \ldots, r$ *(**maximalizace zisku producenta**),*
III: $\mathbf{s} = \mathbf{p} + \bar{\mathbf{s}}$ *(**přípustnost**).*

Podotkněme ještě, že každé CE lze odvodit z CEPOE.

Definice 10.8 (nenasycený spotřebitel). *i-tého spotřebitele nazveme nenasyceným při* $\hat{\mathbf{s}}_i$*, jestliže existuje* $\mathbf{s}_i \in CS_i$ *takové, že* $\mathbf{s}_i \succ_i \hat{\mathbf{s}}_i$*.*

Pojďme se nyní podívat na vztah paretovského optima a bodu kompetitivní rovnováhy. Je možné dokázat následující věty.

Věta 10.4. *Nechť* $\left[\{\hat{\mathbf{s}}_i\}, \{\hat{\mathbf{p}}_j\}\right]$ *je paretovské optimum takové, že alespoň jeden spotřebitel je nenasycený. Pak za předpokladů:*

P2: *preferenční uspořádání* $\succeq_i$ *je konvexní pro každé* $i = 1, \ldots, m$*,*
P3: *PS je konvexní množina,*

existuje cenový vektor $\hat{c}$ *takový, že:*

1. $\hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{s}}_i \leq \hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{s}_i$ *pro každé* $\mathbf{s}_i \in CS_i$*, kde* $\mathbf{s}_i \succeq_i \hat{\mathbf{s}}_i$*,* $i = 1, \ldots, m$*,*
2. $\hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{p}}_j \geq \hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{p}_j$ *pro každé* $\mathbf{p}_j \in PS_j,\ j = 1, \ldots, r$*,*
3. $\hat{\mathbf{s}} = \hat{\mathbf{p}} + \bar{\mathbf{s}}$*.*

Věta 10.5 (K druhé základní otázce welfare economics). *Nechť jsou splněny předpoklady věty 10.4 a navíc následující dva předpoklady:*

P4: *pro daný spotřební vektor* $\hat{\mathbf{s}}_i$ *a cenový vektor* $\hat{\mathbf{c}}$ *existuje* $\mathbf{s}_i' \in CS_i$ *takové, že* $\hat{\mathbf{c}} \cdot \mathbf{s}_i' < \hat{\mathbf{c}} \cdot \hat{\mathbf{s}}_i$*. (existence levnějšího spotřebního vektoru),*
P5: *Pro každé* $i = 1, \ldots, m$ *je množina* $\{\mathbf{s}_i | \mathbf{s}_i \in CS_i, \mathbf{s}_i \preceq_i \mathbf{s}_i'\}$ *uzavřená pro všechna* $\mathbf{s}_i' \in CS_i$ *(spojitost* $\succeq_i$*).*

Pak pro každé paretovské optimum $\left[\{\hat{\mathbf{s}}_i\}, \{\hat{\mathbf{p}}_j\}\right]$ *existuje* $\hat{c} \neq 0$ *takové, že* $\left[\hat{\mathbf{c}}, \{\hat{\mathbf{s}}_i\}, \{\hat{\mathbf{p}}_j\}\right]$ *je bodem kompetitivní rovnováhy.*

Tím jsme alespoň naznačili, co musí být formálně splněno, aby paretovské optimum bylo bodem kompetitivní rovnováhy a aby bod kompetitivní rovnováhy byl paretovským optimem.

Shrnutí

Spotřební množina je zobecněním spotřební funkce (stejně jako u spotřební funkce není ovlivněna důchodem spotřebitele – popisuje pouze spotřební koše, které spotřebitel v dané ekonomice může spotřebovávat). Předpokládáme, že pro každého spotřebitele jsme schopni na jeho spotřební množině nadefinovat preferenční uspořádání. V rámci ekonomie blahobytu pracujeme s podmínkou přípustnosti, tj. doplňujeme předpoklad, že musí být dostatek vstupů (surovin) pro výrobu a musí být dostatek výstupů pro spotřebu. Hledání rovnováhy na trhu welfare economics pak znamená nalezení cenového vektoru a množiny spotřebních a výrobních vektorů, které budou maximalizovat užitek spotřebitelů, maximalizovat zisk výrobců, a přitom nebude porušena podmínka přípustnosti.

Otázky k zamyšlení

- Jak se liší tento přístup od klasického teorie spotřebitele? V čem vidíte podobnosti a v čem zásadní odlišnosti?
- Umíte uvést praktické příklady toho, co znamenají jednotlivé výše uvedené axiomy/předpoklady?
- Jak srozumitelné je pro vás propojení teorie spotřebitele a teorie výrobce v rámci POE, kde jasně vymezujeme, že spotřebitelé získávají důchod buď jako vlastníci vstupů (výrobních faktorů), nebo jako aktéři podílející se na produkční činnosti jako vlastníci/pracovníci firem (v tomto zjednodušujícím případě vlastníci)?
- Co z pohledu klasických ekonomických modelů zprostředkovává vztah mezi výrobci a spotřebiteli tak, aby bylo zajištěno, že spotřebitelé mají důchod, který je v dané ekonomice dosažitelný, a producenti mají dostatek vstupů pro svou činnost?

Další zdroje informací

Baldani, J., Bradfield, J., Turner, R. W. (2005) *Mathematical economics*. Thomson South-Western, 2. vydání. ISBN 0324183321.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie I*. VŠB-TU, Ostrava.

Bauerová, D., Hrbáč, L. a kol. (1995) *Matematická ekonomie II*. VŠB-TU, Ostrava.

Cobb, C. W., Douglas, P. H.: A Theory of Production, *The American Economic Review*, Vol. 18, No. 1, Supplement, Papers and Proceedings of the Fortieth Annual Meeting of the American Economic Association (Mar., 1928), pp. 139–165.

Hands, D. W. (2004) *Introductory mathematical economics*. Oxford University Press, 2. vydání. ISBN 0195133781.

Samuelson, P. A., Nordhaus, W. D. (2007): *Ekonomie*. NS Svoboda, Praha.

Soper, J. (2004) *Mathematics for economics and business: an interactive introduction.* Wiley-Blackwell, 2. vydání. ISBN 1405111275.

Takayama, A. (1997) *Mathematical Economics.* Cambridge University Press, 2nd edition.

Rejstřík

KAPITOLY Z MATEMATICKÉ EKONOMIE

Jan Stoklasa

Odpovědná redaktorka Háta Kreisinger Komňacká

Jazyková korektura Háta Kreisinger Komňacká

Návrh obálky Jiřina Vaclová

Sazba Jan Stoklasa

Vydala Univerzita Palackého v Olomouci

Křížkovského 8

771 47 Olomouc

vydavatelstvi.upol.cz

1. vydání

Olomouc 2023

ISBN 978-80-244-6364-3 (online: iPDF)